Apunts d'inferència estadística

Llorenç Cerdà-Alabern
llorenc@ac.upc.edu
Barcelona, juny de 2008.

Índex

Prefaci

Vaig escriure aquests apunts mentre preparava la segona part de l'assignatura *Cálculo de probabilidades y estadística* del curs 2007-08 de la carrera de matemàtiques de l'UNED. Els apunts estan basats fonamentalment en el llibre de l'assignatura [2], editats amb LaTeX, i les taules de l'apèndix A calculades amb R (http://www.r-project.org).

Capítol 1

Definicions

Inferència estadística Deduir propietats d'un model probabilístic a partir d'un conjunt d'observacions $x_1, \dots x_n$ anomenades valors mostrals (*sample data*), o simplement mostres.

Distribució poblacional o teòrica (*population distribution*) Distribució de la variable aleatòria d'interés d'on es prenen les mostres: $X \sim F(X)$.

Mostra aleatòria simple de mida n (*random sample*) col·lecció de n V.A. independents $X_1, \dots X_n$ amb la mateixa distribució F. Un conjunt particular de mostres $x_1, \dots x_n$ s'anomena realització de la mostra.

Distribució de la mostra Com que les mostres son independents i idènticament distribuïdes (iid), amb $X_i \sim F(X)$:

$$F_n(x_1, \dots x_n) = F(x_1)\,F(x_2)\cdots F(x_n)$$

Estadístic (*statistic*) Funció mesurable $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, d'una mostra aleatòria de mida n, de forma que $T(X_1, \dots X_n)$ és una V.A. Per exemple la mitjana mostral: $T(X_1, \dots X_n) = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$

Distribució en el mostreig d'un estadístic (*sampling distribution*) És la distribució d'un estadístic.

Distribució empírica (*empirical distribution function*) Funció de distribució acumulativa que assigna probabilitat $1/n$ a cada una de les mostres:

$$F_n^*(x) = \frac{\text{nombre de mostres amb valor} \leq x}{n}$$

Capítol 2

Propietats bàsiques de les mostres

Moments poblacionals

$$\alpha_k = \mathrm{E}x^k = \int_X x^k f(x)\,dx \tag{2.1}$$

$$\mu_k = \mathrm{E}(x-\mu)^k = \int_X (x-\mu)^k f(x)\,dx \tag{2.2}$$

Mitjana i variança poblacional

$$\mu = \alpha_1 = \int_X x\,f(x)\,dx \tag{2.3}$$

$$\sigma^2 = \mu_2 = \int_X x^2 f(x)\,dx - \mu^2 = \alpha_2 - \mu^2 \tag{2.4}$$

Moments mostrals

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k \tag{2.5}$$

$$b_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k \tag{2.6}$$

Mitjana, variança i quasi-variança mostral

$$\bar{X} = a_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \tag{2.7}$$

$$s^2 = b_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = a_2 - \bar{X}^2 \tag{2.8}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad n\,s^2 = (n-1)\,S^2 \tag{2.9}$$

Propietats

$$\mathrm{E}\,a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}X_i^k = \alpha_k, \quad \mathrm{E}\bar{X} = \mu$$

$$\mathrm{Var}[a_k] = \mathrm{E}(a_k - \mathrm{E}\,a_k)^2 = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k - \alpha_k\right)^2 =$$
$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i^k - \alpha_k)\right)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}(X_i^k - \alpha_k)^2 =$$
$$\frac{\mathrm{E}X^{2k} - \alpha_k^2}{n} = \frac{\alpha_{2k} - \alpha_k^2}{n}$$

Per tant:

$$\mathrm{Var}[\bar{X}] = \frac{\alpha_2 - \alpha^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma^2 = \mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}X^2 - \mu^2 \\ \mathrm{Var}[\bar{X}] = \mathrm{E}\bar{X}^2 - \mu^2 = \sigma^2/n \\ \mathrm{E}\,s^2 = \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2\right] = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}\bar{X}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\mathrm{E}\,s^2 = (\sigma^2 + \mu^2) - (\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \Rightarrow$$
$$\mathrm{E}\,S^2 = \sigma^2$$

Relació entre la distribució empírica i poblacional

$$F_n^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I_{(-\infty,x]}(x_i) \tag{2.10}$$

$n\,F_n^*(x)$ té una distribució binomial $B(n, F(x))$:

$$F_n^*(x) \xrightarrow{d} N(F(x), \sqrt{F(x)(1-F(x))/n}) \tag{2.11}$$

Quantil d'ordre p

$$\text{Compleix: } F_n^*(c_p) \geq p \quad \text{i} \quad F_n^*(c_p^-) \leq p \tag{2.12}$$

$$n\,p \notin \mathbb{N}: \quad c_p = x_{([n\,p]+1)} \tag{2.13}$$

$$n\,p \in \mathbb{N}: \quad c_p = \frac{x_{(n\,p)} + x_{(n\,p+1)}}{2} \tag{2.14}$$

Nota: $x_{(n)}$ és la mostra ordenada n.

Capítol 3

Poblacions Normals

3.1 Distribució gamma i χ^2

$$\gamma(n,\theta) = \frac{\theta^n x^{n-1} \mathrm{e}^{-\theta x}}{\Gamma(n)}, x \geq 0 \tag{3.1}$$

Mitjana: n/θ, variança: n/θ^2.

$$\chi_n^2 = \gamma(n/2, 1/2) = \frac{1/2^n x^{n/2-1} \mathrm{e}^{-x/2}}{\Gamma(1/2)}, x \geq 0 \tag{3.2}$$

Mitjana: n, variança: $2n$.
Propietats:

$$X_i \sim \gamma(n_i,\theta) \Rightarrow \Sigma X_i \sim \gamma(\Sigma n_i,\theta) \tag{3.3}$$

$$X \sim \gamma(n,\theta) \Rightarrow 2\theta X \sim \chi_{2n}^2 \tag{3.4}$$

$$\chi_n^2 + \chi_m^2 \sim \chi_{n+m}^2 \tag{3.5}$$

$$X_i \sim N(0,1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2 \tag{3.6}$$

$$X_i \sim N(0,\sigma) \Rightarrow \frac{n\,s^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2 \tag{3.7}$$

3.2 Teorema de Fisher

Si $X_i \sim N(\mu,\sigma)$:

$$s^2 \text{ i } \bar{X} \text{son independents} \tag{3.8}$$

$$\bar{X} \sim N(\mu,\sigma/\sqrt{n}) \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \tag{3.9}$$

$$\frac{n\,s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \tag{3.10}$$

3.3 Teorema de Student

$$\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}} \sim t_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, t \in (-\infty,\infty) \tag{3.11}$$

$$t = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}} \sim \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\chi_{n-1}^2}} \sim t_{n-1} \tag{3.12}$$

3.4 Distribució F de Snedecor

Si: $X_i \sim N(0,1)$ i $Y_i \sim N(0,1)$:

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m Y_i^2} \sim \frac{\frac{1}{n}\chi_n^2}{\frac{1}{m}\chi_m^2} \sim F_{n,m} = \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \left(\frac{n}{m}\right)^{-\frac{n}{2}} \left(1+\frac{n}{m}t\right)^{-\frac{n+m}{2}}, t \geq 0 \tag{3.13}$$

Si: $X_i \sim N(\mu_1,\sigma_1)$ i $Y_i \sim N(\mu_2,\sigma_2)$:

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim \frac{\frac{1}{n-1}\chi_{n-1}^2}{\frac{1}{m-1}\chi_{m-1}^2} \sim F_{n-1,m-1} \tag{3.14}$$

Nota: Com que $T \sim F_{n,m} \Rightarrow \frac{1}{T} \sim F_{m,n}$

$$p = \mathcal{P}\{T > x_p\} = \mathcal{P}\{1/T < 1/x_p\} = \mathcal{P}\{T' < 1/x_p\} = 1 - \mathcal{P}\{T' > 1/x_p\} \Rightarrow x_{n,m;p} = 1/x_{m,n;1-p} \tag{3.15}$$

3.5 Altres relacions

Si μ i σ son desconeguts:

$$\mathcal{P}\left\{\frac{|\bar{X}-\mu|}{S/\sqrt{n}} < t_{n-1;p}\right\} = 1-2p \tag{3.16}$$

Si σ és coneguda:

$$\mathcal{P}\left\{\frac{|\bar{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}} < z_p\right\} = 1-2p \tag{3.17}$$

Si: $X_i \sim N(\mu_1,\sigma_1)$ i $Y_i \sim N(\mu_2,\sigma_2)$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}} \sim N(0,1) \\ \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi_{n+m-2}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}}}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left[\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\right]}} \sim t_{n+m-2} \tag{3.18}$$

Si $n,m \geq 15 \Rightarrow S_1^2 \approx \sigma_1^2, S_2^2 \approx \sigma_2^2$:

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}} \sim N(0,1) \tag{3.19}$$

3.6 Correlació mostral

Per una població normal bidimensional (X,Y):

$$R = \frac{S_{11}}{S_1 S_2} \tag{3.20}$$

On:

$$S_{11} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})$$

Teorema: Si el coeficient de correlació de la distribució normal bidimensional val $\rho = 0$:

$$R^* = \frac{R}{\sqrt{\frac{1}{n-2}(1-R^2)}} \sim t_{n-2} \qquad (3.21)$$

Capítol 4
Intervals de confiança

4.1 Definició

Sigui X una V.A. amb distribució poblacional $X \sim F_\theta$ que pertany a una família de distribucions paramètrica $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \{F_\theta | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$$

Sigui $g(\theta) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ i els estadístics unidimensionals $T_1 \le T_2$ tals que:

$$\mathcal{P}_\theta\{T_1(X_1,\dots X_n) \le g(\theta) \le T_2(X_1,\dots X_n)\} \ge 1-\alpha \qquad (4.1)$$

aleshores, $[T_1(X_1,\dots X_n), T_2(X_1,\dots X_n)]$ és un interval de confiança per $g(\theta)$ de nivell de confiança $1-\alpha$. En aquesta definició $g(\theta)$ redueix el paràmetre k-dimencional, a una dimensió. Generalització al cas k-dimensional: Si $S(x_1,\dots x_n)$ és un conjunt on $\mathcal{P}_\theta\{\theta \in S(x_1,\dots x_n)\} \ge 1-\alpha$, aleshores el conjunt $S(x_1,\dots x_n)$ és una regió de confiança per θ de nivell de confiança $1-\alpha$.

4.2 Mètode de la quantitat pivotal

Sigui $T(X_1,\dots X_n;\theta) \sim G(t)$, on $G(t)$ no depèn de θ. Aleshores:

$$\mathcal{P}_\theta\{c_1 \le T_1(X_1,\dots X_n;\theta) \le c_2\} \ge 1-\alpha \qquad (4.2)$$

Per tant:

$$\begin{cases} G(c_1) = \alpha_1 \\ G(c_2) = 1-\alpha_2 \\ \alpha_1+\alpha_2 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(X_1,\dots X_n;\theta) = c_1 \\ T(X_1,\dots X_n;\theta) = c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} g(\theta) = T_1(X_1,\dots X_n;c_1) \\ g(\theta) = T_2(X_1,\dots X_n;c_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathcal{P}_\theta\{c_1 \le T_1(X_1,\dots X_n;\theta), T_1(X_1,\dots X_n;\theta) \le c_2\} =$$
$$\mathcal{P}_\theta\{T_1(X_1,\dots X_n;c_1) \le g(\theta), g(\theta) \le T_2(X_1,\dots X_n;c_2)\} =$$
$$G(c_2) - G(c_1) = 1-\alpha_2-\alpha_1 = 1-\alpha \Rightarrow$$
$[T_1(X_1,\dots X_n;c_1), T_2(X_1,\dots X_n;c_2)]$ és un I.C. per $g(\theta)$

Exemple. Suposem $X \sim N(\theta,\sigma)$:

$$T = \frac{\bar{X}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow$$
$$\mathcal{P}_\theta\{-z_{\alpha/2} < T(X_1,\dots X_n;\theta) < z_{\alpha/2}\} = 1-\alpha \Rightarrow$$
$[\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}]$ és un I.C. per θ.

4.3 Mètode de Neymann

Agafem:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_\theta\{T < c_1(\theta)\} \le \alpha_1 \\ \mathcal{P}_\theta\{T > c_2(\theta)\} \le \alpha_2 \end{cases}$$

On $\alpha_1+\alpha_2 = \alpha$. La regió compresa entre les corbes $c_1(\theta)$ i $c_2(\theta)$ té $\mathcal{P}_\theta\{c_1(\theta) \le T \le c_2(\theta)\} \ge 1-\alpha$. Per tant, per un valor $T = t$:

$$\begin{cases} \theta_1(t) = c_1^{-1}(t) \\ \theta_2(t) = c_2^{-1}(t) \end{cases} \Rightarrow$$
$$\mathcal{P}_\theta\{\theta_1(t) \le \theta \le \theta_2(t)\} \ge 1-\alpha \Rightarrow$$
$[\theta_1(t), \theta_2(t)]$ és un I.C. per θ.

Exemple. Suposem $X \sim$ uniforme en $(0,\theta)$:

$$T = X_{(n)} \Rightarrow G_\theta(t) = \mathcal{P}_\theta\{X_{(n)} \le t\} =$$
$$\begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0 \\ (t/\theta)^n & \text{si } 0 < t < \theta \\ 1 & \text{si } t \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_\theta(c_1(\theta)) = \alpha_1 \\ G_\theta(c_2(\theta)) = 1-\alpha_2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} c_1(\theta) = \theta\alpha_1^{1/n} = t = x_{(n)} \\ c_2(\theta) = \theta(1-\alpha_2)^{1/n} = t = x_{(n)} \end{cases} \Rightarrow$$
$[x_{(n)}(1-\alpha_2)^{-1/n}, x_{(n)}\alpha_1^{-1/n}]$ és un I.C. per θ.

4.4 Distribucions normals

I.C. per μ, σ coneguda:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow [\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}]$$

I.C. per μ, σ desconeguda:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \Rightarrow [\bar{x} \pm t_{n-1;\alpha/2}S/\sqrt{n}]$$

I.C. per σ, μ desconeguda:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \Rightarrow \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}\right]$$

Regió de confiança per μ, σ:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}, \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \text{ son independents } \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \mathcal{P}\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha \\ \mathcal{P}\left\{\chi^2_{n-1;1-\beta/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1;\beta/2}\right\} = 1-\beta \end{cases} \Rightarrow$$
regió amb probabilitat $(1-\alpha)(1-\beta)$.

I.C. per la diferència de mitjanes amb σ_1 i σ_2 conegudes:

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}} \sim N(0,1) \Rightarrow$$
$$\left[\bar{x}-\bar{y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\right]$$

B. Quadre amb algunes distribucions

Distribució	Paràmetres	Funció de densitat	Mitjana	Variança	Funció característica
Bernoulli	$0 \le p \le 1$, $q = 1-p$	$p^k(1-p)^{1-k}$, $k = 0,1$	p	$p(1-p)$	$q+pe^{it}$
Binomial	$0 \le p \le 1$, $q = 1-p$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $k = 0,1,\dots n$	np	$np(1-p)$	$(q+pe^{it})^n$
Geomètrica	$0 \le p \le 1$, $q = 1-p$	$p(1-p)^k$, $k \ge 0$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{p}{1-qe^{it}}$
Binomial negativa	$r > 0$, $0 \le p \le 1$, $q = 1-p$	$\binom{k+r-1}{k}p^r q^k$, $k \ge 0$	$r\frac{1-p}{p}$	$r\frac{1-p}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1-qe^{it}}\right)^r$
Poisson	$\lambda > 0$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k \ge 0$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^{it}-1)\}$
Normal $N(\mu,\sigma)$	$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$, $x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2	$\exp\left\{\mu it - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right\}$
Uniforme	$a < b$	$\frac{1}{b-a}$, $a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
Exponencial	α	$\alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{-1}$
Gamma $\gamma(n,\alpha)$	$\alpha > 0$, $n > 0$	$\frac{\alpha^n x^{n-1}e^{-\alpha x}}{\Gamma(n)}$, $x > 0$	$\frac{n}{\alpha}$	$\frac{n}{\alpha^2}$	$\left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{-n}$
Beta	$p > 0$, $q > 0$	$\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, $0 < x < 1$	$\frac{p}{p+q}$	$\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$	
Cauchy	$a > 0$, $b \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{\pi[a^2+(x-b)^2]}$, $x \in \mathbb{R}$	No existeix	No existeix	$e^{itb-a\|t\|}$

Taula 10.6: Distribució F de Snedecor, $\mathcal{P}\{F_{n,m} > F_{n,m;\alpha}\}$ (continuació).

n												
13	14	15	16	17	18	20	24	30	40	60	120	∞
1,7708	1,7542	1,7395	1,7264	1,7146	1,7039	1,6852	1,6560	1,6252	1,5925	1,5575	1,5198	1,4784
2,0889	2,0635	2,0411	2,0210	2,0030	1,9868	1,9586	1,9147	1,8687	1,8203	1,7689	1,7138	1,6541
2,4089	2,3744	2,3439	2,3167	2,2924	2,2704	2,2324	2,1735	2,1121	2,0477	1,9796	1,9072	1,8291
2,8418	2,7946	2,7530	2,7161	2,6830	2,6532	2,6017	2,5223	2,4397	2,3535	2,2629	2,1670	2,0642
3,1803	3,1231	3,0726	3,0279	2,9880	2,9520	2,8899	2,7941	2,6949	2,5916	2,4834	2,3690	2,2470
1,7620	1,7454	1,7306	1,7174	1,7055	1,6947	1,6759	1,6465	1,6155	1,5825	1,5472	1,5090	1,4670
2,0755	2,0500	2,0275	2,0074	1,9893	1,9730	1,9446	1,9005	1,8543	1,8055	1,7537	1,6981	1,6376
2,3900	2,3554	2,3248	2,2976	2,2732	2,2512	2,2131	2,1540	2,0923	2,0276	1,9591	1,8861	1,8072
2,8144	2,7672	2,7256	2,6886	2,6555	2,6257	2,5742	2,4946	2,4118	2,3253	2,2344	2,1378	2,0342
3,1454	3,0882	3,0379	2,9932	2,9532	2,9173	2,8552	2,7594	2,6601	2,5565	2,4480	2,3331	2,2102
1,7538	1,7371	1,7223	1,7090	1,6970	1,6862	1,6673	1,6377	1,6065	1,5732	1,5376	1,4989	1,4564
2,0630	2,0374	2,0148	1,9946	1,9765	1,9601	1,9317	1,8874	1,8409	1,7918	1,7396	1,6834	1,6223
2,3724	2,3378	2,3072	2,2799	2,2554	2,2334	2,1952	2,1359	2,0739	2,0089	1,9400	1,8664	1,7867
2,7890	2,7418	2,7002	2,6632	2,6301	2,6003	2,5487	2,4689	2,3860	2,2992	2,2079	2,1108	2,0062
3,1132	3,0560	3,0057	2,9611	2,9211	2,8852	2,8230	2,7272	2,6278	2,5241	2,4152	2,2998	2,1760
1,6950	1,6778	1,6624	1,6486	1,6362	1,6249	1,6052	1,5741	1,5411	1,5056	1,4672	1,4248	1,3769
1,9738	1,9476	1,9245	1,9038	1,8851	1,8682	1,8389	1,7929	1,7444	1,6928	1,6373	1,5766	1,5089
2,2481	2,2130	2,1819	2,1542	2,1293	2,1068	2,0677	2,0069	1,9429	1,8752	1,8028	1,7242	1,6371
2,6107	2,5634	2,5216	2,4844	2,4511	2,4210	2,3689	2,2880	2,2034	2,1142	2,0194	1,9172	1,8047
2,8880	2,8312	2,7811	2,7365	2,6966	2,6607	2,5984	2,5020	2,4015	2,2958	2,1838	2,0636	1,9318
1,6602	1,6426	1,6269	1,6128	1,6000	1,5884	1,5681	1,5361	1,5018	1,4648	1,4242	1,3789	1,3267
1,9214	1,8949	1,8714	1,8503	1,8313	1,8141	1,7841	1,7371	1,6872	1,6337	1,5756	1,5115	1,4383
2,1759	2,1404	2,1090	2,0810	2,0558	2,0330	1,9933	1,9313	1,8659	1,7963	1,7211	1,6386	1,5452
2,5083	2,4609	2,4190	2,3816	2,3481	2,3178	2,2652	2,1835	2,0976	2,0066	1,9090	1,8026	1,6831
2,7599	2,7031	2,6531	2,6086	2,5686	2,5326	2,4702	2,3732	2,2717	2,1644	2,0499	1,9254	1,7863
1,6372	1,6193	1,6034	1,5890	1,5760	1,5642	1,5435	1,5107	1,4755	1,4373	1,3952	1,3476	1,2915
1,8870	1,8602	1,8364	1,8151	1,7959	1,7785	1,7480	1,7001	1,6491	1,5943	1,5343	1,4673	1,3893
2,1286	2,0929	2,0613	2,0330	2,0076	1,9846	1,9445	1,8817	1,8152	1,7441	1,6668	1,5810	1,4822
2,4419	2,3944	2,3523	2,3148	2,2811	2,2507	2,1978	2,1154	2,0285	1,9360	1,8363	1,7263	1,6006
2,6771	2,6205	2,5705	2,5259	2,4859	2,4498	2,3872	2,2898	2,1874	2,0789	1,9622	1,8341	1,6885
1,6086	1,5904	1,5741	1,5594	1,5461	1,5340	1,5128	1,4790	1,4426	1,4027	1,3582	1,3071	1,2446
1,8445	1,8174	1,7932	1,7716	1,7520	1,7342	1,7032	1,6542	1,6017	1,5449	1,4821	1,4107	1,3247
2,0706	2,0346	2,0026	1,9741	1,9483	1,9250	1,8843	1,8204	1,7523	1,6790	1,5987	1,5079	1,3998
2,3608	2,3131	2,2709	2,2332	2,1993	2,1686	2,1153	2,0318	1,9435	1,8489	1,7459	1,6304	1,4942
2,5767	2,5201	2,4701	2,4254	2,3854	2,3491	2,2862	2,1881	2,0845	1,9739	1,8540	1,7203	1,5634
1,5803	1,5617	1,5450	1,5300	1,5164	1,5039	1,4821	1,4472	1,4094	1,3676	1,3203	1,2646	1,1926
1,8026	1,7750	1,7505	1,7285	1,7085	1,6904	1,6587	1,6084	1,5543	1,4952	1,4290	1,3519	1,2539
2,0136	1,9773	1,9450	1,9161	1,8900	1,8663	1,8249	1,7597	1,6899	1,6141	1,5299	1,4327	1,3104
2,2818	2,2340	2,1915	2,1536	2,1194	2,0885	2,0346	1,9500	1,8600	1,7629	1,6557	1,5330	1,3805
2,4794	2,4228	2,3727	2,3280	2,2878	2,2514	2,1881	2,0890	1,9840	1,8709	1,7469	1,6055	1,4311
1,5240	1,5046	1,4871	1,4714	1,4570	1,4439	1,4206	1,3832	1,3419	1,2951	1,2400	1,1686	1,0000
1,7202	1,6918	1,6664	1,6435	1,6228	1,6038	1,5705	1,5173	1,4591	1,3940	1,3180	1,2214	1,0000
1,9027	1,8656	1,8326	1,8028	1,7759	1,7515	1,7085	1,6402	1,5660	1,4835	1,3883	1,2684	1,0000
2,1299	2,0815	2,0385	2,0000	1,9652	1,9336	1,8783	1,7908	1,6964	1,5923	1,4730	1,3246	1,0000
2,2938	2,2371	2,1867	2,1417	2,1011	2,0642	1,9998	1,8983	1,7891	1,6691	1,5325	1,3637	1,0000

I.C. per la diferència de mitjanes amb $\sigma_1 = \sigma_2$:

$$\frac{\frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{1/n+1/m}}}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}(nS_1^2+mS_2^2)}} \sim t_{n+m-2} \Rightarrow$$

$$\left[\bar{x}-\bar{y} \pm t_{n+m-2;\alpha/2}\sqrt{\frac{nS_1^2+mS_2^2}{n+m-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right]$$

Quocient de variances, σ_1/σ_2:

$$\frac{S_1^2/\sigma_1}{S_2^2/\sigma_2} \sim F_{n-1,m-1} \Rightarrow$$

$$\left[\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{n-1,m-1;\alpha/2}}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}}\right]$$

Distribucions asimptòtiques. T_n és una successió d'estadístics, i $\sigma_n(\theta)$ depèn en general de n i del paràmetre θ. Si:

$$\frac{T_n-\theta}{\sigma_n(\theta)} \xrightarrow{d} N(0,1) \Rightarrow$$

$$\mathcal{P}_\theta\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{T_n-\theta}{\sigma_n(\theta)} < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1-\alpha$$

De manera que si es pot aïllar θ de la desigualtat, es té un I.C. per θ.

Capítol 5
Estimació puntual

Estimador: Estadístic $T(X_1,\dots X_n) : \mathcal{X} \to \Theta$ que permet l'estimació d'un paràmetre θ d'una distribució $\in \mathcal{F} = \{F_\theta | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$.

5.1 Comparació d'estimadors

Funció de pèrdua $L(\theta,t) : \Theta \times \Theta \to \mathbb{R}$: Dóna el cost quan s'estima t i el paràmetre real és θ.

Risc Si $G_\theta(t)$ és la distribució de l'estimador:

$$R_T(\theta) = \mathrm{E}_\theta[L(\theta, T(X_1,\dots X_n))] = \int_{\mathbb{R}} L(\theta,t)G_\theta(dt) \quad (5.1)$$

Error quadràtic mitjà (EQM)

$$L(\theta,t) = (\theta-t)^2 \qquad \mathrm{EQM}(\theta) = \mathrm{E}_\theta(\theta-t)^2 \quad (5.2)$$

Estimador inadmissible Per qualsevol θ té un risc major que un altre estimador de la mateixa família.

Biaix

$$b_T(\theta) = \mathrm{E}_\theta[T] - g(\theta) \Rightarrow \quad (5.3)$$

$$\mathrm{EQM}(\theta) = \mathrm{E}_\theta((T-\mathrm{E}T)-(g(\theta)-\mathrm{E}T))^2 = \mathrm{E}(T-\mathrm{E}T)^2 + (g(\theta)-\mathrm{E}T)^2 = \mathrm{Var}_\theta + b_T(\theta)^2 \quad (5.4)$$

Consistència

$$T_n \xrightarrow{Prob} g(\theta) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_\theta\{|T_n - g(\theta)| < \varepsilon\} \quad \to \quad 0 \quad (5.5)$$

Per exemple:

$$a_k(n) \to \alpha_k(\theta) \qquad b_k(n) \to \mu_k(\theta) \qquad F_n^*(x) \to F_\theta(x)$$

Invariança La pròpia família també ho ha de ser.

Translació:

$$F_\theta(x) = F_{\theta+c}(x+c) \qquad f_\theta(x) = f_{\theta+c}(x+c) \quad (5.6)$$

Escala:

$$\begin{matrix} F_\theta(x) = F_{b\theta}(bx) \\ f_\theta(x) = b\,f_{b\theta}(bx) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} F_\theta(x) = F_1(x/\theta) \\ f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}f_1(x/\theta) \end{matrix} \quad (5.7)$$

Translació i escala:

$$F_{\theta_1\theta_2}(x) = F(\tfrac{x-\theta_1}{\theta_2}) \qquad f_{\theta_1\theta_2}(x) = \tfrac{1}{\theta_2}f(\tfrac{x-\theta_1}{\theta_2}) \quad (5.8)$$

Suficiència La distribució de la mostra condicionada per l'estadístic no depèn de θ:

$$\mathcal{P}_\theta\{X = x | T(x) = t\} = \mathcal{P}\{X = x | T(x) = t\} \qquad \text{altra notació: } \mathcal{P}\{x|t,\theta\} = \mathcal{P}\{x|t\} \quad (5.9)$$

Teorema de la factorització $T(X_1,\dots X_n)$ és suficient si i solament si:

$$f_\theta(x_1,\dots x_n) = g_\theta(T(x_1,\dots x_n))\,h(x_1,\dots x_n) \quad (5.10)$$

Estadístic suficient minimal T' és un estadístic suficient minimal si qualsevol altra suficient T es pot expressar com a funció de T': $T = \varphi(T')$

Teorema: Un estadístic $T(x_1,\dots x_n)$ és suficient minimal si i sol. si:

$$\frac{f_\theta(x_1,\dots x_n)}{f_\theta(x_1',\dots x_n')} \text{ és independent de } \theta \Leftrightarrow$$

$$T(x_1,\dots x_n) = T(x_1',\dots x_n') \quad (5.11)$$

Un estadístic suficient minimal és únic, excepte transformacions biunívoques.

Exemple: Per a una família exponencial:

$$f_\theta(x) = c(\theta)\,h(x)\exp\left\{\sum_{j=1}^p q_j(\theta)T_j(x)\right\} \quad (5.12)$$

$$\frac{f_\theta(x_1,\dots x_n)}{f_\theta(x_1',\dots x_n')} = \frac{h(x_1)\cdots h(x_n)}{h(x_1')\cdots h(x_n')} \times \exp\left\{\sum_{j=1}^p q_j(\theta)\left[\sum_{i=1}^n T_j(x_i) - \sum_{i=1}^n T_j(x_i')\right]\right\}$$

Que serà independent de θ només si $\sum_{i=1}^n T_j(x_i) = \sum_{i=1}^n T_j(x_i')$. Per tant, l'estadístic $(\sum_{i=1}^n T_1(x_i),\dots \sum_{i=1}^n T_p(x_i))$ és suficient minimal.

Estadístic anciliar és un estadístic amb distribució independent del paràmetre. Per exemple, si $X_i \sim N(\mu,\sigma)$, aleshores, l'estadístic $T = \frac{ns^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ és anciliar de μ.

5.2 Estimador minimax

Estimador que agafant el màxim risc al variar θ, dóna el mínim valor:

$$\min_T \max_{\theta\in\Theta} R_T(\theta) \tag{5.13}$$

5.3 Estimador Bayes

Suposem θ una V.A. amb distribució "a priori" $\pi(\theta)$. El "risc bayes" és:

$$r_T(\pi) = \int_\theta R_T(\theta)\,\pi(d\theta) \tag{5.14}$$

L'estimador Bayes és el que minimitza $r_T(\pi)$:

$$\inf_T r_T(\pi) \tag{5.15}$$

Donat que $f(\theta,x_1,\dots x_n) = \pi(\theta) f_\theta(x_1,\dots x_n)$, la distribució marginal de $(X_1,\dots X_n)$ val:

$$f(x_1,\dots x_n) = \int_\theta f(\theta,x_1,\dots x_n)\,d\theta = \int_\theta \pi(\theta) f_\theta(x_1,\dots x_n)\,d\theta$$

i la "distribució a posteriori" de θ condicionada per $(X_1,\dots X_n)$ serà:

$$\pi(\theta|x_1,\dots x_n) = \frac{\pi(\theta) f_\theta(x_1,\dots x_n)}{f(x_1,\dots x_n)} = \frac{\pi(\theta) f_\theta(x_1,\dots x_n)}{\int_\theta \pi(\theta) f_\theta(x_1,\dots x_n)\,d\theta} \tag{5.16}$$

i el risc Bayes:

$$r_T(\pi) = \int_\theta R_T(\theta)\,\pi(d\theta) = \int_\theta \int_X L(\theta, T(x_1,\dots x_n))\, f_\theta(x_1,\dots x_n)\,dx_1\dots dx_n\, \pi(\theta)\,d\theta$$
$$= \int_X \int_\theta L(\theta, T(x_1,\dots x_n))\,\pi(\theta|x_1,\dots x_n)\,d\theta \; f(x_1,\dots x_n)\,dx_1\dots dx_n$$

Per tant, l'estimador Bayes és el que minimitza:

$$\inf_T \int_\theta L(\theta, T(x_1,\dots x_n))\,\pi(\theta|x_1,\dots x_n)\,d\theta \Rightarrow$$

$$\begin{cases} L(\theta,t) = |\theta - t| \Rightarrow T(x_1,\dots x_n) = \\ \quad \text{mediana de } \pi(\theta|x_1,\dots x_n) \\ L(\theta,t) = \mathrm{EQM}(\theta) = (\theta - t)^2 \Rightarrow \\ \quad T(x_1,\dots x_n) = \text{ mitjana de } \pi(\theta|x_1,\dots x_n) = \\ \quad \mathrm{E}[\theta|x_1,\dots x_n] \end{cases}$$

Propietats de l'estimador Bayes:

- Pot ser biaixat.
- $\pi(\theta|x_1,\dots x_n)$ és funció de l'estimador minimal suficient.
- Si $R_T(\theta)$ és independent de θ, T és un estimador minimax.

Capítol 6
Estimadors de risc mínim

6.1 Estimador centrat uniformement de mínima variança (ECUMV)

Estimador centrat

$$\mathrm{E}_\theta T = g(\theta) \tag{6.1}$$

L'ECUMV minimitza l'EQM:

$$\mathrm{EQM}(\theta) = \mathrm{E}_\theta(g(\theta) - T)^2 = \mathrm{E}_\theta(E_\theta T - T)^2 = \mathrm{Var}_\theta T$$

Teorema: Si l'ECUMV existeix és únic (pot not existir, p.e. si no existeix un estimador centrat de $g(\theta)$).

Teorema de Rao-Blackwell Si S és un estadístic suficient i T és un estadístic centrat, aleshores $T' = \mathrm{E}_\theta[T|S]$: (i) És un estimador centrat de $g(\theta)$, (ii) $\mathrm{Var}_\theta(T') \le \mathrm{Var}_\theta(T)$. Més precisament: Si $L(\theta,t)$ és convexa $\Rightarrow \mathrm{E}[T|S]$ té sempre un risc menor que T.
Demostració:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}T &= \mathrm{VarE}[T|S] + \mathrm{EVar}[T|S] \Rightarrow \\ \mathrm{Var}T &\ge \mathrm{VarE}[T|S] = \mathrm{Var}T' \\ \mathrm{E}T' &= \mathrm{EE}[T|S] = \mathrm{E}T \end{aligned}$$

Estadístic complet Un estadístic $T(X_1,\dots X_n)$ és complet si compleix:

$$\mathrm{E}_\theta f(T) = 0 \Rightarrow f(s) = 0 \text{ c.s. per tot } \theta \in \Theta$$

Propietats:

- Un estadístic suficient complet, és suficient minimal. Si una família de distribucions té un estadístic suficient minimal complet, la família s'anomena completa.
- Si la distribució poblacional és del tipus exponencial (veure (5.12)):

$$f_\theta(x) = c(\theta) h(\theta) \exp\left\{\sum_{j=1}^p q_j(\theta) T_j(x)\right\}$$

L'estadístic $(\sum_{i=1}^n T_1(x_i),\dots \sum_{i=1}^n T_p(x_i))$ és complet si $(q_1(\theta),\dots q_p(\theta))$ conté un conjunt obert en $\mathbb{R}^p$ (veure [1, teorema 6.2.25, pàg. 288]).

Taula 10.6: Distribució F de Snedecor, $\mathcal{P}\{F_{n,m} > F_{n,m;\alpha}\}$ (continuació).

m	α	n = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	0,100	2,8939	2,5028	2,2906	2,1571	2,0645	1,9958	1,9427	1,9001	1,8652	1,8359	1,8110	1,7895
	0,050	4,1960	3,3404	2,9467	2,7141	2,5581	2,4453	2,3593	2,2913	2,2360	2,1900	2,1512	2,1179
28	0,025	5,6096	4,2205	3,6264	3,2863	3,0625	2,9026	2,7820	2,6872	2,6106	2,5473	2,4940	2,4484
	0,010	7,6356	5,4529	4,5681	4,0740	3,7539	3,5276	3,3581	3,2259	3,1195	3,0320	2,9585	2,8959
	0,005	9,2838	6,4403	5,3170	4,6977	4,2996	4,0197	3,8110	3,6488	3,5186	3,4117	3,3222	3,2460
	0,100	2,8870	2,4955	2,2831	2,1494	2,0566	1,9878	1,9345	1,8918	1,8568	1,8274	1,8024	1,7808
	0,050	4,1830	3,3277	2,9340	2,7014	2,5454	2,4324	2,3463	2,2782	2,2229	2,1768	2,1379	2,1045
29	0,025	5,5878	4,2006	3,6072	3,2674	3,0438	2,8840	2,7633	2,6686	2,5920	2,5286	2,4752	2,4295
	0,010	7,5977	5,4204	4,5378	4,0449	3,7254	3,4995	3,3302	3,1982	3,0920	3,0045	2,9311	2,8685
	0,005	9,2297	6,3958	5,2764	4,6591	4,2622	3,9831	3,7749	3,6130	3,4832	3,3765	3,2871	3,2111
	0,100	2,8807	2,4887	2,2761	2,1422	2,0492	1,9803	1,9269	1,8841	1,8490	1,8195	1,7944	1,7727
	0,050	4,1709	3,3158	2,9223	2,6896	2,5335	2,4205	2,3343	2,2662	2,2107	2,1646	2,1256	2,0921
30	0,025	5,5675	4,1821	3,5894	3,2499	3,0265	2,8667	2,7460	2,6513	2,5746	2,5112	2,4577	2,4120
	0,010	7,5625	5,3903	4,5097	4,0179	3,6990	3,4735	3,3045	3,1726	3,0665	2,9791	2,9057	2,8431
	0,005	9,1797	6,3547	5,2388	4,6234	4,2276	3,9492	3,7416	3,5801	3,4505	3,3440	3,2547	3,1787
	0,100	2,8354	2,4404	2,2261	2,0909	1,9968	1,9269	1,8725	1,8289	1,7929	1,7627	1,7369	1,7146
	0,050	4,0847	3,2317	2,8388	2,6060	2,4495	2,3359	2,2490	2,1802	2,1240	2,0772	2,0376	2,0035
40	0,025	5,4239	4,0510	3,4633	3,1261	2,9037	2,7444	2,6238	2,5289	2,4519	2,3882	2,3343	2,2882
	0,010	7,3141	5,1785	4,3126	3,8283	3,5138	3,2910	3,1238	2,9930	2,8876	2,8005	2,7273	2,6648
	0,005	8,8279	6,0664	4,9758	4,3738	3,9861	3,7129	3,5088	3,3498	3,2220	3,1168	3,0284	2,9531
	0,100	2,8087	2,4120	2,1967	2,0608	1,9660	1,8954	1,8405	1,7963	1,7598	1,7291	1,7029	1,6802
	0,050	4,0343	3,1826	2,7900	2,5572	2,4004	2,2864	2,1992	2,1299	2,0734	2,0261	1,9861	1,9515
50	0,025	5,3403	3,9749	3,3902	3,0544	2,8327	2,6736	2,5530	2,4579	2,3808	2,3168	2,2627	2,2162
	0,010	7,1706	5,0566	4,1993	3,7195	3,4077	3,1864	3,0202	2,8900	2,7850	2,6981	2,6250	2,5625
	0,005	8,6258	5,9016	4,8259	4,2316	3,8486	3,5785	3,3765	3,2189	3,0920	2,9875	2,8997	2,8247
	0,100	2,7911	2,3933	2,1774	2,0410	1,9457	1,8747	1,8194	1,7748	1,7380	1,7070	1,6805	1,6574
	0,050	4,0012	3,1504	2,7581	2,5252	2,3683	2,2540	2,1665	2,0970	2,0401	1,9926	1,9522	1,9174
60	0,025	5,2856	3,9253	3,3425	3,0077	2,7863	2,6274	2,5068	2,4117	2,3344	2,2702	2,2159	2,1692
	0,010	7,0771	4,9774	4,1259	3,6490	3,3389	3,1187	2,9531	2,8233	2,7184	2,6317	2,5587	2,4961
	0,005	8,4946	5,7950	4,7290	4,1399	3,7599	3,4918	3,2911	3,1344	3,0083	2,9042	2,8166	2,7419
	0,100	2,7693	2,3702	2,1536	2,0165	1,9206	1,8491	1,7933	1,7483	1,7110	1,6796	1,6526	1,6292
	0,050	3,9604	3,1108	2,7188	2,4859	2,3287	2,2142	2,1263	2,0564	1,9991	1,9512	1,9105	1,8753
80	0,025	5,2184	3,8643	3,2841	2,9504	2,7295	2,5708	2,4502	2,3549	2,2775	2,2130	2,1584	2,1115
	0,010	6,9627	4,8807	4,0363	3,5631	3,2551	3,0361	2,8713	2,7420	2,6374	2,5508	2,4777	2,4151
	0,005	8,3346	5,6652	4,6113	4,0285	3,6524	3,3867	3,1876	3,0320	2,9066	2,8030	2,7159	2,6413
	0,100	2,7478	2,3473	2,1300	1,9923	1,8959	1,8238	1,7675	1,7220	1,6843	1,6524	1,6250	1,6012
	0,050	3,9201	3,0718	2,6802	2,4472	2,2898	2,1750	2,0868	2,0164	1,9588	1,9105	1,8693	1,8337
120	0,025	5,1523	3,8046	3,2269	2,8943	2,6740	2,5154	2,3948	2,2994	2,2217	2,1570	2,1021	2,0548
	0,010	6,8509	4,7865	3,9491	3,4795	3,1736	2,9558	2,7918	2,6629	2,5586	2,4721	2,3990	2,3363
	0,005	8,1788	5,5393	4,4972	3,9207	3,5482	3,2849	3,0874	2,9330	2,8083	2,7052	2,6183	2,5439
	0,100	2,7055	2,3026	2,0838	1,9449	1,8473	1,7741	1,7167	1,6702	1,6315	1,5987	1,5705	1,5458
	0,050	3,8415	2,9957	2,6049	2,3719	2,2141	2,0986	2,0096	1,9384	1,8799	1,8307	1,7887	1,7522
∞	0,025	5,0239	3,6889	3,1161	2,7858	2,5665	2,4082	2,2875	2,1918	2,1136	2,0483	1,9927	1,9447
	0,010	6,6349	4,6052	3,7816	3,3192	3,0173	2,8020	2,6393	2,5113	2,4073	2,3209	2,2477	2,1848
	0,005	7,8794	5,2983	4,2794	3,7151	3,3499	3,0913	2,8968	2,7444	2,6210	2,5188	2,4324	2,3583

Taula 10.6: Distribució F de Snedecor, $\mathcal{P}\{F_{n,m} > F_{n,m;\alpha}\}$ (continuació).

n												
13	14	15	16	17	18	20	24	30	40	60	120	∞
1,8940	1,8785	1,8647	1,8524	1,8414	1,8314	1,8142	1,7873	1,7592	1,7298	1,6988	1,6659	1,6308
2,2800	2,2556	2,2341	2,2149	2,1977	2,1823	2,1555	2,1141	2,0712	2,0264	1,9795	1,9302	1,8780
2,6808	2,6469	2,6171	2,5907	2,5670	2,5457	2,5089	2,4523	2,3937	2,3329	2,2696	2,2032	2,1333
3,2422	3,1949	3,1533	3,1165	3,0836	3,0541	3,0031	2,9249	2,8442	2,7608	2,6742	2,5839	2,4893
3,6961	3,6378	3,5866	3,5412	3,5008	3,4645	3,4020	3,3062	3,2075	3,1058	3,0004	2,8908	2,7762
1,8745	1,8588	1,8449	1,8325	1,8214	1,8113	1,7938	1,7667	1,7382	1,7083	1,6768	1,6433	1,6074
2,2495	2,2250	2,2033	2,1840	2,1667	2,1511	2,1242	2,0825	2,0391	1,9938	1,9464	1,8963	1,8432
2,6369	2,6030	2,5731	2,5465	2,5228	2,5014	2,4645	2,4076	2,3486	2,2873	2,2234	2,1562	2,0853
3,1769	3,1296	3,0880	3,0512	3,0183	2,9887	2,9377	2,8594	2,7785	2,6947	2,6077	2,5168	2,4212
3,6111	3,5530	3,5020	3,4568	3,4164	3,3802	3,3178	3,2220	3,1234	3,0215	2,9159	2,8058	2,6904
1,8570	1,8412	1,8272	1,8146	1,8034	1,7932	1,7755	1,7481	1,7193	1,6890	1,6569	1,6228	1,5861
2,2222	2,1975	2,1757	2,1563	2,1389	2,1232	2,0960	2,0540	2,0103	1,9645	1,9165	1,8657	1,8117
2,5978	2,5638	2,5338	2,5071	2,4833	2,4618	2,4247	2,3675	2,3082	2,2465	2,1819	2,1141	2,0422
3,1187	3,0715	3,0299	2,9931	2,9602	2,9306	2,8796	2,8011	2,7199	2,6359	2,5484	2,4568	2,3603
3,5358	3,4779	3,4270	3,3818	3,3416	3,3054	3,2431	3,1474	3,0488	2,9467	2,8408	2,7302	2,6140
1,8411	1,8252	1,8111	1,7984	1,7871	1,7768	1,7590	1,7312	1,7021	1,6714	1,6388	1,6041	1,5668
2,1975	2,1727	2,1508	2,1313	2,1138	2,0980	2,0707	2,0283	1,9842	1,9380	1,8895	1,8380	1,7831
2,5626	2,5285	2,4984	2,4717	2,4478	2,4262	2,3890	2,3315	2,2718	2,2097	2,1446	2,0760	2,0032
3,0667	3,0195	2,9779	2,9411	2,9082	2,8786	2,8274	2,7488	2,6675	2,5831	2,4952	2,4029	2,3055
3,4686	3,4108	3,3600	3,3150	3,2748	3,2387	3,1764	3,0807	2,9821	2,8799	2,7736	2,6625	2,5455
1,8267	1,8107	1,7964	1,7837	1,7723	1,7619	1,7439	1,7159	1,6864	1,6554	1,6224	1,5871	1,5490
2,1752	2,1502	2,1282	2,1086	2,0910	2,0751	2,0476	2,0050	1,9605	1,9139	1,8648	1,8128	1,7570
2,5308	2,4966	2,4665	2,4396	2,4156	2,3940	2,3567	2,2989	2,2389	2,1763	2,1107	2,0415	1,9677
3,0199	2,9727	2,9311	2,8942	2,8613	2,8317	2,7805	2,7017	2,6202	2,5355	2,4471	2,3542	2,2559
3,4083	3,3506	3,2999	3,2549	3,2148	3,1787	3,1165	3,0208	2,9221	2,8197	2,7132	2,6016	2,4837
1,8136	1,7974	1,7831	1,7703	1,7587	1,7483	1,7302	1,7019	1,6721	1,6407	1,6073	1,5715	1,5327
2,1548	2,1298	2,1077	2,0880	2,0703	2,0543	2,0267	1,9838	1,9390	1,8920	1,8424	1,7896	1,7330
2,5019	2,4677	2,4374	2,4106	2,3865	2,3648	2,3273	2,2693	2,2090	2,1460	2,0799	2,0099	1,9353
2,9775	2,9303	2,8887	2,8519	2,8189	2,7892	2,7380	2,6591	2,5773	2,4923	2,4035	2,3100	2,2107
3,3538	3,2962	3,2456	3,2007	3,1606	3,1246	3,0624	2,9667	2,8679	2,7654	2,6585	2,5463	2,4276
1,8015	1,7853	1,7708	1,7579	1,7463	1,7358	1,7175	1,6890	1,6589	1,6272	1,5934	1,5570	1,5176
2,1362	2,1111	2,0889	2,0691	2,0513	2,0353	2,0075	1,9643	1,9192	1,8718	1,8217	1,7684	1,7110
2,4756	2,4413	2,4110	2,3840	2,3599	2,3381	2,3005	2,2422	2,1816	2,1183	2,0516	1,9811	1,9055
2,9390	2,8918	2,8502	2,8133	2,7803	2,7506	2,6993	2,6203	2,5383	2,4530	2,3637	2,2696	2,1694
3,3044	3,2469	3,1963	3,1515	3,1114	3,0754	3,0133	2,9176	2,8187	2,7160	2,6088	2,4960	2,3765
1,7905	1,7741	1,7596	1,7466	1,7349	1,7243	1,7059	1,6771	1,6468	1,6147	1,5805	1,5437	1,5036
2,1192	2,0939	2,0716	2,0518	2,0339	2,0178	1,9898	1,9464	1,9010	1,8533	1,8027	1,7488	1,6906
2,4515	2,4171	2,3867	2,3597	2,3355	2,3137	2,2759	2,2174	2,1565	2,0928	2,0257	1,9545	1,8781
2,9038	2,8565	2,8150	2,7781	2,7450	2,7153	2,6640	2,5848	2,5026	2,4170	2,3273	2,2325	2,1315
3,2594	3,2020	3,1515	3,1067	3,0666	3,0306	2,9685	2,8728	2,7738	2,6709	2,5633	2,4501	2,3297
1,7802	1,7638	1,7492	1,7361	1,7244	1,7137	1,6951	1,6662	1,6356	1,6032	1,5686	1,5313	1,4906
2,1035	2,0781	2,0558	2,0358	2,0179	2,0017	1,9736	1,9299	1,8842	1,8361	1,7852	1,7307	1,6717
2,4293	2,3948	2,3644	2,3373	2,3131	2,2912	2,2533	2,1946	2,1334	2,0693	2,0018	1,9300	1,8527
2,8715	2,8243	2,7827	2,7458	2,7127	2,6830	2,6316	2,5522	2,4699	2,3840	2,2938	2,1985	2,0965
3,2182	3,1608	3,1104	3,0656	3,0256	2,9897	2,9275	2,8318	2,7327	2,6296	2,5217	2,4079	2,2867

Exemple: Si $X \sim N(\theta,\theta)$:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} e^{-1/2} \exp\left\{\frac{x}{\theta} - \frac{x^2}{2\theta^2}\right\}$$

Per tant, l'estadístic $(T_1,T_2) = (\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^2)$ és suficient minimal (veure (5.11)), però no és complet, perquè el paràmetre $(1/\theta, 1/\theta^2)$ no conté un conjunt obert en $\mathbb{R}^2$. De fet: $s^2 = 1/n\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2 = 1/nT_2 - n^2T_1^2$. Com que $ns^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$, i $\mathrm{Var}\bar{x} = \mathrm{E}\bar{x}^2 - (\mathrm{E}\bar{x})^2 = \sigma^2/n$, podem calcular: $\mathrm{E}T_1^2 = n\theta^2(n+1)$, $\mathrm{E}T_2 = 2n\theta^2$, i concloure que $f_\theta(T_1,T_2) = 2T_1^2 - (n+1)T_2 \neq 0$ té $\mathrm{E}_\theta f(T_1,T_2) = 0, \forall\theta\in\Theta$. Per tant, l'estadístic (T_1,T_2) no és complet.

Teorema de Lehmann-Sheffé Si S és un estadístic complet i T és un estadístic centrat i existeix un ECUMV, aleshores és $E_\theta[T|S]$.

6.2 Acotació de la variança

Quantitat d'informació de Fisher

$$I(\theta) = \mathrm{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(x_1,\dots x_n)\right)^2\right] \qquad (6.2)$$

Per un mostreig aleatori simple, $I(\theta) = n\,i(\theta)$, on $i(\theta)$ és la informació de Fisher d'una mostra de mida 1, és a dir, de la distribució poblacional. A més, si $\int_X \frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(x_1,\dots x_n)\,dx_1\dots dx_n = 0$ és derivable:

$$i(\theta) = \mathrm{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(x)\right)^2\right] = -\mathrm{E}_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_\theta(x)\right] \qquad (6.3)$$

Desigualtat de Fréchet-Cramer-Rao Si es compleixen condicions de regularitat:

- Θ és un conjunt obert de $\mathbb{R}$.
- $\{(x_1,\dots x_n)\in X | f_\theta(x_1,\dots x_n) > 0\}$ no depèn de θ (no es verifica per distribucions amb recorregut que depèn de θ, p.e. la uniforme).
- Existeix $\frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(x_1,\dots x_n)$.
- $\int_X \frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(x_1,\dots x_n)\,dx_1\dots dx_n = 0$

Un estadístic centrat $g(\theta) = E_\theta T$, $E_\theta T^2 < \infty$ tal que $g'(\theta) = \int_X T(x_1,\dots x_n)\frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(x_1,\dots x_n)\,dx_1\dots dx_n$ i $I(\theta) > 0$ aleshores es compleix:

$$\mathrm{Var}[T]\,I(\theta) \geq g'(\theta)^2 \Rightarrow \mathrm{Var}[T] = \frac{g'(\theta)^2}{I(\theta)}, \theta\in\Theta \qquad (6.4)$$

La igualtat només es dóna si i solament si hi ha una funció $k(\theta)$ tal que:

$$T(x_1,\dots x_n) = g(\theta) + k(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(x_1,\dots x_n) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(x_1,\dots x_n) = \frac{1}{k(\theta)}(T(x_1,\dots x_n) - g(\theta)) \qquad (6.5)$$

Nota: La distribució uniforme no és regular, i la desigualtat (6.4) no és vàlida.

Estimador eficient és un estimador centrat amb variança igual a la cota de Fréchet-Cramer-Rao. Si T és eficient $\Rightarrow$ és l'ECUMV. La equació (6.5) pot ser una manera de trobar el millor estimador de $g(\theta)$.

Nota: La igualtat (6.5) només la compleixen distribucions de la família exponencial (veure (5.12)), però el contrari no és cert: Hi pot haver distribucions de la família exponencial que no són eficients.

Generalització de la desigualtat de Fréchet-Cramer-Rao Si el paràmetre és multidimensional ($\theta = (\theta_1,\dots\theta_k) \in \mathbb{R}^k$), $I(\theta)$ és la matriu simètrica:

$$I_{ij}(\theta) = \mathrm{E}_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}\log f_\theta(x_1,\dots x_n)\frac{\partial}{\partial\theta_j}\log f_\theta(x_1,\dots x_n)\right]$$

Si $T = (T_1,\dots T_r)$ és un estimador r-dimensional de $g(\theta) = (g_1(\theta),\dots g_r(\theta))$ amb matriu de covariances: $\mathrm{Var}_\theta(T) = \mathrm{E}_\theta[(T-g(\theta))^t(T-g(\theta))]$, aleshores la matriu:

$$\mathrm{Var}_\theta(T) - \Delta I(\theta)^{-1}\Delta^t, \quad \Delta_{ij} = \frac{\partial}{\partial\theta_j} g_i(\theta) \qquad (6.6)$$

és definida no negativa. Implicacions:

- $\mathrm{Var}_\theta(T) \geq (\Delta I(\theta)^{-1}\Delta^t)_{ii}$
- $\sum_{i=1}^r \mathrm{Var}_\theta(T_i)$ = traça de $\mathrm{Var}_\theta(T) \geq$ traça de $\Delta I(\theta)^{-1}\Delta^t$
- $|\mathrm{Var}_\theta(T)| \geq |\Delta I(\theta)^{-1}\Delta^t|$. Si $r = k$:

$$|\mathrm{Var}_\theta(T)| \geq \frac{|\Delta|^2}{|I(\theta)|} \qquad (6.7)$$

Capítol 7
Mètodes d'estimació

7.1 Mètode dels moments

Consisteix en igualar els moments mostrals i poblacionals:

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$$

$$\alpha_k = \int_X x^k f(x)\,dx$$

Exemple:

$$X \sim N(\mu,\sigma) \Rightarrow \begin{cases}\hat{\mu} = \hat{x} \\ \hat{\alpha}_2 = \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = a_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\hat{\mu} = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = a_2 - \bar{x}^2 = s^2\end{cases}$$

7.2 Mètode de la màxima verosimilitut

$$\hat{\theta} = f_{\hat{\theta}}(x_1,\dots x_n) = \max_{\theta\in\Theta} f_\theta(x_1,\dots x_n) \quad (7.1)$$

Sovint és millor buscar el màxim del logaritme:

$$\hat{\theta} = \log f_{\hat{\theta}}(x_1,\dots x_n) = \max_{\theta\in\Theta} \log f_\theta(x_1,\dots x_n) \quad (7.2)$$

Cal buscar els màxims relatius i comparar-los amb el màxim en la frontera de Θ. Si $\theta = (\theta_1,\dots\theta_k)$:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}\log f_\theta(x_1,\dots x_n) = 0$$
$$j = 1,\dots k$$

Propietats

- Si θ és unidimensional i la família regular, si existeix un estimador centrat i eficient de θ, aleshores ha de ser l'únic estimador de màxima verosimilitut. Demostració:

  Eficient $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta = \frac{1}{k(\theta)}(T(x_1,\dots x_n) - g(\theta))$

  Màxima verosimilitut $\Rightarrow$

  $\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta = 0 \Rightarrow g(\hat{\theta}) = T(x_1,\dots x_n)$

- Invariança: Si $\hat{\theta}$ és l'estimador de màxima verosimilitut de θ, aleshores $g(\hat{\theta})$ és l'estimador de màxima verosimilitut de $g(\theta)$. Nota: És possible que $\hat{\theta}$ sigui un estimador centrat de θ, però que $g(\hat{\theta})$ no ho sigui de $g(\theta)$.

- Propietats asimptòtiques:
  - És consistent: $\hat{\theta}_n \xrightarrow{d} \theta$.
  - Sota certes condicions de regularitat: $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sqrt{i(\theta)^{-1}})$

7.3 Estimació Bayesiana

Donada la distribució a posteriori (veure (5.16)):

$$\pi(\theta|x_1,\dots x_n) = \frac{\pi(\theta)\, f_\theta(x_1,\dots x_n)}{f(x_1,\dots x_n)} = \frac{\pi(\theta)\, f_\theta(x_1,\dots x_n)}{\int_\Theta \pi(\theta)\, f_\theta(x_1,\dots x_n)\,d\theta}$$

La mitjana minimitza l'EQM. El màxim (la moda de la distribució) també és un estimador en el sentit de màxima verosimilitut. Nota: si $\pi(\theta)$ és una distribució uniforme, aleshores la moda de $\pi(\theta|x_1,\dots x_n)$ coincidirà amb l'estimador de màxima verosimilitut.

Capítol 8
Constrast d'hipòtesi

Hipòtesi nul·la: $H_o : \theta \in \Theta_0$
Hipòtesi alternativa: $H_1 : \theta \in \Theta_1$.

Test d'hipòtesi: divisió del recorregut de $X = (X_1,\dots X_n) \in X$ en dues regions C i C^c:

Regió crítica, C : si $X \in C$ es rebutja H_o.
Regió d'acceptació, C^c : si $X \in C^c$ s'accepta H_o.

- Test aleatoritzat: $\varphi : X \to [0,1]$. φ s'anomena funció crítica del test.
- Test no aleatoritzat:

$$\varphi(x_1,\dots x_n) = I_C(x_1,\dots x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1,\dots x_n \in C \\ 0 & \text{si } x_1,\dots x_n \in C^c \end{cases}$$

Alternatives del contrast:

	H_0 és certa	H_0 és falsa
Rebutjar H_0	error de tipus I	correcte
Acceptar H_0	correcte	error de tipus II

Criteri tradicional:

- Fixar una cota α a l'error de tipus I: Nivell de significació del contrast. Normalment $\alpha = 0{,}1; 0{,}05; \dots$
- Triar una família de tests que:

$$\mathcal{P}_{H_0}\{C\} \le \alpha \text{ ó } \mathrm{E}_{H_0}\varphi(x_1,\dots x_n) \le \alpha$$

- D'entra la família, triar la que minimitza l'error de tipus II:

$$\mathcal{P}_{H_1}\{C\} \text{ ó } \mathrm{E}_{H_1}\varphi(x_1,\dots x_n)$$

Funció de potència $\beta(\theta)$ Quan la distribució poblacional depèn d'un paràmetre θ, $\beta(\theta)$ és la probabilitat de que $X = (X_1,\dots X_n) \in C$ quan el paràmetre val θ, és a dir, és la probabilitat de rebutjar H_0 quan el paràmetre val θ:

$$\beta(\theta) = \mathcal{P}_\theta\{X \in C\} = \mathrm{E}_\theta\varphi(X), \quad X = (X_1,\dots X_n)$$

Un test té nivell de significació α si $\beta(\theta) \le \alpha\, \forall\theta \in \Theta_0$. S'anomena mida del test el $\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta(\theta)$. És desitjable que sigui α.

Donats 2 tests φ i φ' de significació α, φ es diu uniformement més potent que φ' si:

$$\beta_\varphi(\theta) \ge \beta_{\varphi'}(\theta),\ \theta \in \Theta_1$$

Nota: L'error de tipus II val $1 - \beta(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$, per tant, φ tindrà un error de tipus II menor que φ'.

Taula 10.6: Distribució F de Snedecor, $\mathcal{P}\{F_{n,m} > F_{n,m;\alpha}\}$ (continuació).

m	α	n = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	0,100	2,9899	2,6056	2,3970	2,2663	2,1760	2,1094	2,0580	2,0171	1,9836	1,9557	1,9321	1,9117
	0,050	4,3807	3,5219	3,1273	2,8951	2,7401	2,6283	2,5435	2,4768	2,4227	2,3779	2,3402	2,3079
19	0,025	5,9216	4,5075	3,9034	3,5587	3,3327	3,1718	3,0509	2,9563	2,8801	2,8173	2,7645	2,7196
	0,010	8,1850	5,9259	5,0103	4,5003	4,1708	3,9386	3,7653	3,6305	3,5225	3,4338	3,3596	3,2965
	0,005	10,072	7,0935	5,9161	5,2681	4,8526	4,5614	4,3448	4,1770	4,0428	3,9329	3,8410	3,7631
	0,100	2,9747	2,5892	2,3801	2,2489	2,1582	2,0913	2,0397	1,9985	1,9648	1,9367	1,9129	1,8924
	0,050	4,3512	3,4928	3,0984	2,8661	2,7109	2,5990	2,5140	2,4471	2,3928	2,3479	2,3100	2,2776
20	0,025	5,8715	4,4613	3,8587	3,5147	3,2891	3,1283	3,0074	2,9128	2,8365	2,7737	2,7209	2,6758
	0,010	8,0960	5,8489	4,9382	4,4307	4,1027	3,8714	3,6987	3,5644	3,4567	3,3682	3,2941	3,2311
	0,005	9,9439	6,9865	5,8177	5,1743	4,7616	4,4722	4,2569	4,0900	3,9564	3,8470	3,7555	3,6779
	0,100	2,9610	2,5746	2,3649	2,2333	2,1423	2,0751	2,0232	1,9819	1,9480	1,9197	1,8957	1,8750
	0,050	4,3248	3,4668	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727	2,4876	2,4205	2,3660	2,3209	2,2829	2,2504
21	0,025	5,8266	4,4199	3,8188	3,4754	3,2501	3,0895	2,9686	2,8740	2,7977	2,7348	2,6819	2,6368
	0,010	8,0166	5,7804	4,8741	4,3688	4,0421	3,8117	3,6396	3,5056	3,3981	3,3098	3,2359	3,1730
	0,005	9,8295	6,8914	5,7304	5,0911	4,6809	4,3931	4,1789	4,0128	3,8799	3,7709	3,6798	3,6024
	0,100	2,9486	2,5613	2,3512	2,2193	2,1279	2,0605	2,0084	1,9668	1,9327	1,9042	1,8801	1,8593
	0,050	4,3010	3,4434	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491	2,4638	2,3965	2,3419	2,2967	2,2585	2,2258
22	0,025	5,7863	4,3828	3,7829	3,4401	3,2151	3,0546	2,9338	2,8392	2,7628	2,6998	2,6469	2,6017
	0,010	7,9454	5,7190	4,8166	4,3134	3,9880	3,7583	3,5867	3,4530	3,3458	3,2576	3,1837	3,1209
	0,005	9,7271	6,8064	5,6524	5,0168	4,6088	4,3225	4,1094	3,9440	3,8116	3,7030	3,6122	3,5350
	0,100	2,9374	2,5493	2,3387	2,2065	2,1149	2,0472	1,9949	1,9531	1,9189	1,8902	1,8659	1,8450
	0,050	4,2793	3,4221	3,0280	2,7955	2,6400	2,5277	2,4422	2,3748	2,3201	2,2747	2,2364	2,2036
23	0,025	5,7498	4,3492	3,7505	3,4083	3,1835	3,0231	2,9024	2,8077	2,7313	2,6682	2,6152	2,5699
	0,010	7,8811	5,6637	4,7649	4,2636	3,9392	3,7102	3,5390	3,4057	3,2986	3,2106	3,1368	3,0740
	0,005	9,6348	6,7300	5,5823	4,9501	4,5441	4,2591	4,0469	3,8822	3,7502	3,6420	3,5515	3,4745
	0,100	2,9271	2,5383	2,3274	2,1949	2,1030	2,0351	1,9826	1,9407	1,9062	1,8775	1,8530	1,8319
	0,050	4,2597	3,4028	3,0088	2,7763	2,6206	2,5082	2,4226	2,3551	2,3002	2,2547	2,2163	2,1834
24	0,025	5,7166	4,3187	3,7211	3,3794	3,1548	2,9946	2,8738	2,7791	2,7027	2,6396	2,5865	2,5412
	0,010	7,8229	5,6136	4,7180	4,2184	3,8951	3,6667	3,4959	3,3629	3,2560	3,1681	3,0944	3,0316
	0,005	9,5513	6,6609	5,5190	4,8898	4,4857	4,2019	3,9905	3,8264	3,6949	3,5870	3,4967	3,4199
	0,100	2,9177	2,5283	2,3170	2,1842	2,0922	2,0241	1,9714	1,9292	1,8947	1,8658	1,8412	1,8200
	0,050	4,2417	3,3852	2,9912	2,7587	2,6030	2,4904	2,4047	2,3371	2,2821	2,2365	2,1979	2,1649
25	0,025	5,6864	4,2909	3,6943	3,3530	3,1287	2,9686	2,8478	2,7531	2,6766	2,6135	2,5603	2,5149
	0,010	7,7698	5,5680	4,6755	4,1774	3,8550	3,6272	3,4567	3,3239	3,2172	3,1294	3,0558	2,9931
	0,005	9,4753	6,5982	5,4615	4,8351	4,4327	4,1500	3,9394	3,7758	3,6447	3,5370	3,4470	3,3704
	0,100	2,9091	2,5191	2,3075	2,1745	2,0822	2,0139	1,9610	1,9188	1,8841	1,8550	1,8303	1,8090
	0,050	4,2252	3,3690	2,9752	2,7426	2,5868	2,4741	2,3883	2,3205	2,2654	2,2197	2,1811	2,1479
26	0,025	5,6586	4,2655	3,6697	3,3289	3,1048	2,9447	2,8240	2,7293	2,6528	2,5896	2,5363	2,4909
	0,010	7,7213	5,5263	4,6366	4,1400	3,8183	3,5911	3,4210	3,2884	3,1818	3,0941	3,0205	2,9579
	0,005	9,4059	6,5409	5,4091	4,7852	4,3844	4,1027	3,8928	3,7297	3,5989	3,4916	3,4017	3,3252
	0,100	2,9012	2,5106	2,2987	2,1655	2,0730	2,0045	1,9515	1,9091	1,8743	1,8451	1,8203	1,7989
	0,050	4,2100	3,3541	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591	2,3732	2,3053	2,2501	2,2043	2,1655	2,1323
27	0,025	5,6331	4,2421	3,6472	3,3067	3,0828	2,9228	2,8021	2,7074	2,6309	2,5676	2,5143	2,4688
	0,010	7,6767	5,4881	4,6009	4,1056	3,7848	3,5580	3,3882	3,2558	3,1494	3,0617	2,9882	2,9256
	0,005	9,3423	6,4885	5,3611	4,7396	4,3402	4,0594	3,8501	3,6875	3,5571	3,4499	3,3602	3,2839

Taula 10.6: Distribució F de Snedecor, $\mathcal{P}\{F_{n,m} > F_{n,m;\alpha}\}$ (continuació).

n: 13	14	15	16	17	18	20	24	30	40	60	120	∞
2,2687	2,2553	2,2435	2,2330	2,2237	2,2153	2,2007	2,1784	2,1554	2,1317	2,1072	2,0818	2,0554
2,8872	2,8647	2,8450	2,8276	2,8120	2,7980	2,7740	2,7372	2,6995	2,6609	2,6211	2,5801	2,5379
3,5832	3,5504	3,5217	3,4963	3,4737	3,4534	3,4185	3,3654	3,3110	3,2554	3,1984	3,1399	3,0798
4,6496	4,6008	4,5581	4,5205	4,4869	4,4569	4,4054	4,3269	4,2469	4,1653	4,0819	3,9965	3,9090
5,5887	5,5257	5,4707	5,4221	5,3789	5,3403	5,2740	5,1732	5,0705	4,9659	4,8592	4,7501	4,6385
2,1930	2,1792	2,1671	2,1563	2,1467	2,1380	2,1231	2,1000	2,0762	2,0516	2,0261	1,9996	1,9721
2,7614	2,7386	2,7186	2,7009	2,6851	2,6709	2,6465	2,6090	2,5705	2,5309	2,4901	2,4480	2,4045
3,3917	3,3588	3,3299	3,3044	3,2816	3,2612	3,2261	3,1725	3,1176	3,0613	3,0035	2,9441	2,8828
4,3416	4,2932	4,2509	4,2134	4,1801	4,1503	4,0991	4,0209	3,9411	3,8596	3,7761	3,6904	3,6024
5,1649	5,1030	5,0489	5,0011	4,9586	4,9205	4,8552	4,7557	4,6543	4,5508	4,4450	4,3367	4,2255
2,1313	2,1173	2,1048	2,0938	2,0839	2,0751	2,0597	2,0360	2,0115	1,9861	1,9597	1,9323	1,9036
2,6602	2,6371	2,6168	2,5989	2,5828	2,5684	2,5436	2,5055	2,4663	2,4259	2,3842	2,3410	2,2962
3,2393	3,2062	3,1772	3,1515	3,1286	3,1081	3,0728	3,0187	2,9633	2,9064	2,8478	2,7874	2,7249
4,0998	4,0518	4,0096	3,9724	3,9392	3,9095	3,8584	3,7805	3,7008	3,6192	3,5355	3,4494	3,3608
4,8358	4,7748	4,7213	4,6741	4,6321	4,5945	4,5299	4,4314	4,3309	4,2282	4,1229	4,0149	3,9039
2,0802	2,0658	2,0532	2,0419	2,0318	2,0227	2,0070	1,9827	1,9576	1,9315	1,9043	1,8759	1,8462
2,5769	2,5536	2,5331	2,5149	2,4987	2,4841	2,4589	2,4202	2,3803	2,3392	2,2966	2,2524	2,2064
3,1150	3,0819	3,0527	3,0269	3,0039	2,9832	2,9477	2,8932	2,8373	2,7797	2,7204	2,6590	2,5955
3,9052	3,8573	3,8154	3,7782	3,7452	3,7156	3,6646	3,5867	3,5070	3,4253	3,3413	3,2548	3,1654
4,5733	4,5129	4,4600	4,4132	4,3716	4,3344	4,2703	4,1726	4,0727	3,9704	3,8655	3,7577	3,6465
2,0370	2,0224	2,0095	1,9981	1,9878	1,9785	1,9625	1,9377	1,9119	1,8852	1,8572	1,8280	1,7973
2,5073	2,4837	2,4630	2,4446	2,4282	2,4134	2,3879	2,3487	2,3082	2,2664	2,2229	2,1778	2,1307
3,0119	2,9786	2,9493	2,9234	2,9003	2,8795	2,8437	2,7888	2,7324	2,6742	2,6141	2,5519	2,4872
3,7452	3,6975	3,6557	3,6187	3,5857	3,5561	3,5052	3,4274	3,3476	3,2656	3,1813	3,0942	3,0040
4,3591	4,2993	4,2468	4,2005	4,1592	4,1222	4,0585	3,9614	3,8619	3,7600	3,6553	3,5473	3,4359
2,0002	1,9853	1,9722	1,9606	1,9501	1,9406	1,9243	1,8990	1,8728	1,8454	1,8168	1,7867	1,7550
2,4481	2,4244	2,4034	2,3849	2,3683	2,3533	2,3275	2,2878	2,2468	2,2043	2,1601	2,1141	2,0659
2,9249	2,8915	2,8621	2,8361	2,8128	2,7919	2,7559	2,7006	2,6437	2,5850	2,5242	2,4611	2,3954
3,6115	3,5639	3,5222	3,4853	3,4523	3,4228	3,3719	3,2940	3,2141	3,1319	3,0471	2,9594	2,8684
4,1813	4,1219	4,0698	4,0237	3,9827	3,9459	3,8826	3,7859	3,6867	3,5850	3,4803	3,3722	3,2602
1,9682	1,9532	1,9399	1,9281	1,9175	1,9079	1,8913	1,8656	1,8388	1,8108	1,7816	1,7508	1,7182
2,3973	2,3733	2,3522	2,3335	2,3167	2,3016	2,2756	2,2354	2,1938	2,1507	2,1058	2,0589	2,0096
2,8506	2,8170	2,7875	2,7614	2,7380	2,7170	2,6808	2,6252	2,5678	2,5085	2,4471	2,3831	2,3163
3,4981	3,4506	3,4089	3,3721	3,3391	3,3096	3,2587	3,1808	3,1007	3,0183	2,9331	2,8447	2,7528
4,0314	3,9723	3,9205	3,8746	3,8338	3,7972	3,7342	3,6378	3,5389	3,4372	3,3324	3,2240	3,1115
1,9404	1,9252	1,9117	1,8997	1,8889	1,8792	1,8624	1,8362	1,8090	1,7805	1,7506	1,7191	1,6856
2,3531	2,3289	2,3077	2,2888	2,2719	2,2567	2,2304	2,1898	2,1477	2,1040	2,0584	2,0107	1,9604
2,7863	2,7526	2,7230	2,6968	2,6733	2,6522	2,6158	2,5598	2,5020	2,4422	2,3801	2,3153	2,2474
3,4007	3,3533	3,3117	3,2748	3,2419	3,2124	3,1615	3,0835	3,0032	2,9205	2,8348	2,7458	2,6530
3,9033	3,8445	3,7929	3,7473	3,7066	3,6701	3,6073	3,5112	3,4124	3,3108	3,2058	3,0971	2,9839
1,9158	1,9004	1,8868	1,8747	1,8638	1,8539	1,8369	1,8103	1,7827	1,7537	1,7232	1,6910	1,6567
2,3143	2,2900	2,2686	2,2496	2,2325	2,2172	2,1907	2,1497	2,1071	2,0629	2,0166	1,9681	1,9168
2,7302	2,6964	2,6667	2,6404	2,6168	2,5956	2,5590	2,5027	2,4445	2,3842	2,3214	2,2558	2,1869
3,3162	3,2689	3,2273	3,1904	3,1575	3,1280	3,0771	2,9990	2,9185	2,8354	2,7493	2,6597	2,5660
3,7926	3,7341	3,6827	3,6373	3,5967	3,5603	3,4977	3,4017	3,3030	3,2014	3,0962	2,9871	2,8732

Nivell crític (p-valor) Donada una mostra $(x_1,\dots x_n)$ és el nivell de significació $\alpha(x_1,\dots x_n)$ més petit que ens porta a rebutjar H_0, donat que H_0 és certa. Quan es fa servir el p-valor, es rebutja H_0 en cas de resultar un p-valor inferior al nivell de significació desitjat.

Exemple: Suposem $X\sim N(\theta,\sigma)$, amb σ conegut i $H_0:\theta=\theta_0, H_1:\theta=\theta_1$, amb $\theta_0<\theta_1$. La regió crítica és del tipus $\{\bar{x}>c\}$, on c s'anomena punt crític. Com que $\frac{\bar{x}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$, la funció de potència val:

$$\beta(\theta)=\mathcal{P}_\theta\{\bar{x}>c\}=\mathcal{P}_\theta\left\{\frac{\bar{x}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{c-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}=\mathcal{P}_\theta\left\{z>\frac{c-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right\},\ z\sim N(0,1)$$

Si fixem un nivell de significació α (mètode tradicional), haurà de ser: $\mathcal{P}_{\theta_0}\left\{z>\frac{c-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}=\alpha\Rightarrow\frac{c-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}=z_\alpha\Rightarrow c=\theta_0+z_\alpha\sigma/\sqrt{n}$, i el test serà: Rebutjar H_0 si $\bar{x}>\theta_0+z_\alpha\sigma/\sqrt{n}$. Amb un error de tipus II:

$$1-\beta(\theta_1)=\mathcal{P}_{\theta_1}\left\{z>\frac{c-\theta_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}=1-\mathcal{P}_{\theta_1}\left\{z>\frac{\theta_0+z_\alpha\sigma/\sqrt{n}-\theta_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}=1-\mathcal{P}_{\theta_1}\left\{z>z_\alpha+\frac{\theta_0-\theta_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}$$

Amb el mètode del p-valor: Si hem mesurat la mostra $\bar{x}^*$, aleshores el menor nivell crític que permet rebutjar la mostra condueix a fixar: $c=\bar{x}^*$, per tant:

$$z_\alpha=\frac{c-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\bar{x}^*-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Rightarrow$$
$$\alpha(x_1,\dots x_n)=\mathcal{P}\{z>z_\alpha\}=\mathcal{P}\left\{z>\frac{\bar{x}^*-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}$$

Amb un error de tipus II:

$$1-\beta(\theta_1)=1-\mathcal{P}_{\theta_1}\left\{z>z_\alpha+\frac{\theta_0-\theta_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}=1-\mathcal{P}_{\theta_1}\left\{z>\frac{\bar{x}^*-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}+\frac{\theta_0-\theta_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}=1-\mathcal{P}_{\theta_1}\left\{z>\frac{\bar{x}^*-\theta_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}$$

Per exemple, si $\theta_0=15$, $\theta_1=16$, $\sigma=1$ i mesurem $\bar{x}^*=15{,}6$ en una mostra aleatòria de mida $n=25$:

- Mètode tradicional: Si fixem $\alpha=0{,}005\Rightarrow z_\alpha=2{,}5758\Rightarrow$ el test és rebutjar H_o si $\bar{x}>\theta_0+z_\alpha\sigma/\sqrt{n}=15{,}5152$, per tant, amb $\bar{x}^*=15{,}6$ es rebutjaria H_0 amb un error de tipus II de: $1-\beta(\theta_1)=1-\mathcal{P}\{z>-2{,}4242\}=\mathcal{P}\{z>2{,}4242\}=0{,}0077$.
- Mètode del p-valor: El nivell crític val: $\alpha(x_1,\dots x_n)=\mathcal{P}\{z>3\}=0.0013$. Com que és menor que $\alpha=0{,}05$, es rebutjaria el test amb un error de tipus II: $1-\beta(\theta_1)=1-\mathcal{P}\{z>-2\}=\mathcal{P}\{z>2\}=0{,}0228$.

8.1 Contrast simple-simple

Lema de Neyman-Pearson Sigui $X=(X_1,\dots X_n)$ amb funció de distribució $\mathcal{P}_\theta\{x_1,\dots x_n\}$ i funció de densitat $f_\theta(x_1,\dots x_n)$. Donades les hipòtesis $H_o:\theta=\theta_0$ i $H_1:\theta=\theta_1$, el test de regió crítica C que:

$$\begin{cases} f_{\theta_1}(x_1,\dots x_n)>k\,f_{\theta_0}(x_1,\dots x_n),\ (x_1,\dots x_n)\in C\\ f_{\theta_1}(x_1,\dots x_n)<k\,f_{\theta_0}(x_1,\dots x_n),\ (x_1,\dots x_n)\in C^c\\ k>0\\ \mathcal{P}_{\theta_0}\{x_1,\dots x_n\in C\}=\alpha\end{cases}\tag{8.1}$$

és un de nivell de significació α de màxima potència. Pel test aleatoritzat:

$$\varphi(x_1,\dots x_n)=\begin{cases}1, & f_{\theta_1}(x_1,\dots x_n)>k\,f_{\theta_0}(x_1,\dots x_n)\\ \gamma, & f_{\theta_1}(x_1,\dots x_n)=f_{\theta_0}(x_1,\dots x_n)\\ 0, & f_{\theta_1}(x_1,\dots x_n)<k\,f_{\theta_0}(x_1,\dots x_n)\end{cases}$$
$$\mathrm{E}\,\varphi(x_1,\dots x_n)=\alpha$$

Exemple: Sigui $X\sim N(\theta,\sigma)$, $H_o:\theta=\theta_0$ i $H_1:\theta=\theta_1$, $\theta_0<\theta_1$. Les condicions (8.1) porten a la regió crítica: $\{\bar{x}>c\}$, on $c>0$ depèn de $k,\sigma,\theta_0,\theta_1$. Com que $\bar{X}\sim N(\theta,\sigma/\sqrt{n})$:

$$\mathcal{P}_{\theta_0}\{\bar{x}>c\}=\mathcal{P}_{\theta_0}\left\{\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{c-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}=\mathcal{P}\left\{z>\frac{c-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}=\alpha\Rightarrow\frac{c-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}=z_\alpha\Rightarrow c=\theta_0+z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Per tant, si $\bar{x}>\theta_0+z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es rebutja H_0, altrament s'accepta.

8.2 Contrast unilateral

Raó de verosimilitut monòtona Es diu que un estadístic T té una raó de verosimilitut monòtona si per cada $\theta<\theta'$ el quocient:

$$\frac{f_{\theta'}(x_1,\dots x_n)}{f_\theta(x_1,\dots x_n)}$$

és creixent amb T. Per exemple, la família exponencial $f_\theta(x)=c(\theta)h(x)\mathrm{e}^{q(\theta)T(x)}$ té:

$$\frac{f_{\theta'}(x_1,\dots x_n)}{f_\theta(x_1,\dots x_n)}=\frac{c(\theta')}{c(\theta)}\mathrm{e}^{(q(\theta')-q(\theta))T(x)}$$

que és monòtona (creix amb T ó $-T$).

Teorema de Karlin-Rubin Per un contrast $H_o:\theta\le\theta_0$, $H_1:\theta>\theta_0$, per un estadístic T amb raó de verosimilitut monòtona existeix el test φ de mida de significació α uniformement de màxima potència:

$$\varphi(x_1,\dots x_n)=\begin{cases}1, & T(x_1,\dots x_n)>c\\ \gamma, & T(x_1,\dots x_n)=c\\ 0, & T(x_1,\dots x_n)<c\end{cases}\tag{8.2}$$
$$\mathrm{E}\,\varphi(x_1,\dots x_n)=\alpha$$

Per el contrast $H_o : \theta \geq \theta_0$, $H_1 : \theta < \theta_0$ basta invertir les desigualtats del test.
Exemple: Sigui $X \sim N(\theta, \sigma)$, $H_o : \theta \leq \theta_0$ i $H_1 : \theta > \theta_1$. La raó de verosimilitut és monòtona amb $\bar{x}$, per tant, les condicions (8.2) porten a:

$$\varphi(x_1, \ldots x_n) = \begin{cases} 1, & \bar{x} > c \\ 0, & \bar{x} < c \end{cases}$$
$$E\,\varphi(x_1, \ldots x_n) = \alpha$$

Com que $\bar{X} \sim N(\theta, \sigma/\sqrt{n})$ i la funció de potència creix amb θ, el màxim s'assoleix per $\theta = \theta_0$:

$$\mathcal{P}_{\theta_0}\{\bar{x} > c\} = \mathcal{P}_{\theta_0}\left\{\frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} =$$
$$\mathcal{P}\left\{z > \frac{c - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = \alpha \Rightarrow \frac{c - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha \Rightarrow$$
$$c = \theta_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Per tant, si $\bar{x} > \theta_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es rebutja H_0, altrament s'accepta.

8.3 Contrast bilateral

Per contrastar $H_o : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta \neq \theta_0$ ó $H_o : \theta \in [\theta_0, \theta_1]$, $H_1 : \theta \notin [\theta_0, \theta_1]$. En general no existeix un test uniformement de màxima potència. Per això definim un test no biaixat:

$$\text{Té nivell de significació } \alpha : \ \beta(\theta) = E_\theta\,\varphi \leq \alpha,\ \theta \in \Theta_0$$
$$\beta(\theta) = E_\theta\,\varphi \geq \alpha,\ \theta \in \Theta_1 \tag{8.3}$$

Nota: Un test uniformement de màxima potència és no biaixat.

Teorema de Lehmann Si la distribució poblacional és exponencial uniparamètrica, aleshores existeix un test no biaixat uniformement de màxima potència pel contrast $H_o : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta \neq \theta_0$ ó $H_o : \theta \in [\theta_0, \theta_1]$, $H_1 : \theta \notin [\theta_0, \theta_1]$:

$$\varphi(x_1, \ldots x_n) = \begin{cases} 1, & T(x_1, \ldots x_n) \notin [c_1, c_2] \\ \gamma_1, & T(x_1, \ldots x_n) = c_1 \\ \gamma_2, & T(x_1, \ldots x_n) = c_2 \\ 0, & T(x_1, \ldots x_n) \in (c_1, c_2) \end{cases} \tag{8.4}$$

On les constants $\gamma_1, \gamma_2, c_1, c_2$ han de verificar:

- Si $H_o : \theta = \theta_0$:

$$E_{\theta_0}[\varphi] = \alpha$$
$$E_{\theta_0}[\varphi T] = \alpha E_{\theta_0}[T]$$

- Si $H_o : \theta \in [\theta_0, \theta_1]$:

$$E_{\theta_0}[\varphi] = \alpha$$
$$E_{\theta_1}[\varphi] = \alpha$$

8.4 Contrast de poblacions normals

$H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$C = \left\{\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{S/\sqrt{n}} > t_{n-1;\alpha/2}\right\}$$

$H_0 : \mu \leq \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$

$$C = \left\{\frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{n-1;\alpha}\right\}$$

$H_0 : \sigma = \sigma_0, H_1 : \sigma \neq \sigma_0$

$$C = \left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right\} \bigcup \left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1;\alpha/2}\right\}$$

$H_0 : \sigma \leq \sigma_0, H_1 : \sigma > \sigma_0$

$$C = \left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1;\alpha}\right\}$$

Capítol 9
Mètodes de contrast

9.1 Test de raó de verosimilituts

Per contrastar $H_o : \theta \in \Theta_0$, $H_1 : \theta \in \Theta_1$, $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$:

$$\Lambda(x_1, \ldots x_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f(x_1, \ldots x_n)}{\sup_{\theta \in \Theta} f(x_1, \ldots x_n)} = \frac{f_{\hat{\theta}_0}(x_1, \ldots x_n)}{f_{\hat{\theta}}(x_1, \ldots x_n)} \tag{9.1}$$

on $\hat{\theta}_0$ i $\hat{\theta}$ són els estadístics de màxima verosimilitut de θ segons es consideri Θ_0 o Θ com espai paramètric, amb regió crítica:

$$C = \{\Lambda(x_1, \ldots x_n) < c\}$$
$$\mathcal{P}_\theta\{X_1, \ldots X_n \in C\} = \alpha$$

El test es pot aleatoritzar:

$$\varphi(x_1, \ldots x_n) = \begin{cases} 1, & \Lambda(x_1, \ldots x_n) < c \\ \gamma, & \Lambda(x_1, \ldots x_n) = c \\ 0, & \Lambda(x_1, \ldots x_n) > c \end{cases}$$
$$\sup_{\theta \in \Theta_0} E\,\varphi(x_1, \ldots x_n) = \alpha$$

Nota: En el cas de simple-simple:

$$\Lambda(x_1, \ldots x_n) = \frac{f_{\theta_0}(x_1, \ldots x_n)}{\max\{f_{\theta_0}(x_1, \ldots x_n), f_{\theta_1}(x_1, \ldots x_n)\}}$$

La regió crítica: $C = \{\Lambda(x_1, \ldots x_n) < c\}$ equival al lema de Neyman-Pearson: $f_{\theta_1}(x_1, \ldots x_n) > k\, f_{\theta_0}(x_1, \ldots x_n)$.

Taula 10.6: Distribució F de Snedecor, $\mathcal{P}\{F_{n,m} > F_{n,m;\alpha}\}$ (continuació).

m	α	n = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	0,100	3,2850	2,9245	2,7277	2,6053	2,5216	2,4606	2,4140	2,3771	2,3473	2,3226	2,3018	2,2841
	0,050	4,9646	4,1028	3,7083	3,4781	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204	2,9782	2,9430	2,9130
10	0,025	6,9367	5,4564	4,8256	4,4683	4,2361	4,0721	3,9498	3,8549	3,7790	3,7168	3,6649	3,6210
	0,010	10,044	7,5594	6,5523	5,9943	5,6363	5,3858	5,2001	5,0567	4,9424	4,8491	4,7715	4,7059
	0,005	12,826	9,4270	8,0808	7,3428	6,8724	6,5446	6,3025	6,1159	5,9676	5,8467	5,7462	5,6613
	0,100	3,2252	2,8595	2,6602	2,5362	2,4512	2,3891	2,3416	2,3040	2,2735	2,2482	2,2269	2,2087
	0,050	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946	3,0123	2,9480	2,8962	2,8536	2,8179	2,7876
11	0,025	6,7241	5,2559	4,6300	4,2751	4,0440	3,8807	3,7586	3,6638	3,5879	3,5257	3,4737	3,4296
	0,010	9,6460	7,2057	6,2167	5,6683	5,3160	5,0692	4,8861	4,7445	4,6315	4,5393	4,4624	4,3974
	0,005	12,226	8,9123	7,6004	6,8809	6,4218	6,1015	5,8647	5,6821	5,5368	5,4183	5,3197	5,2363
	0,100	3,1766	2,8068	2,6055	2,4801	2,3940	2,3310	2,2828	2,2446	2,2135	2,1878	2,1660	2,1474
	0,050	4,7472	3,8853	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964	2,7534	2,7173	2,6866
12	0,025	6,5538	5,0959	4,4742	4,1212	3,8911	3,7283	3,6065	3,5118	3,4358	3,3735	3,3215	3,2773
	0,010	9,3302	6,9266	5,9525	5,4120	5,0643	4,8206	4,6395	4,4994	4,3875	4,2961	4,2198	4,1553
	0,005	11,754	8,5096	7,2258	6,5211	6,0711	5,7570	5,5245	5,3451	5,2021	5,0855	4,9884	4,9062
	0,100	3,1362	2,7632	2,5603	2,4337	2,3467	2,2830	2,2341	2,1953	2,1638	2,1376	2,1155	2,0966
	0,050	4,6672	3,8056	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144	2,6710	2,6347	2,6037
13	0,025	6,4143	4,9653	4,3472	3,9959	3,7667	3,6043	3,4827	3,3880	3,3120	3,2497	3,1975	3,1532
	0,010	9,0738	6,7010	5,7394	5,2053	4,8616	4,6204	4,4410	4,3021	4,1911	4,1003	4,0245	3,9603
	0,005	11,373	8,1865	6,9258	6,2335	5,7910	5,4819	5,2529	5,0761	4,9351	4,8199	4,7241	4,6429
	0,100	3,1022	2,7265	2,5222	2,3947	2,3069	2,2426	2,1931	2,1539	2,1220	2,0954	2,0730	2,0537
	0,050	4,6001	3,7389	3,3439	3,1122	2,9583	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458	2,6022	2,5655	2,5342
14	0,025	6,2979	4,8567	4,2417	3,8919	3,6634	3,5014	3,3799	3,2853	3,2093	3,1469	3,0946	3,0501
	0,010	8,8616	6,5149	5,5639	5,0354	4,6950	4,4558	4,2779	4,1399	4,0297	3,9394	3,8640	3,8001
	0,005	11,060	7,9216	6,6803	5,9984	5,5623	5,2574	5,0313	4,8566	4,7173	4,6034	4,5085	4,4281
	0,100	3,0732	2,6952	2,4898	2,3614	2,2730	2,2081	2,1582	2,1185	2,0862	2,0593	2,0366	2,0171
	0,050	4,5431	3,6823	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876	2,5437	2,5068	2,4753
15	0,025	6,1995	4,7650	4,1528	3,8043	3,5764	3,4147	3,2934	3,1987	3,1227	3,0602	3,0078	2,9633
	0,010	8,6831	6,3589	5,4170	4,8932	4,5556	4,3183	4,1415	4,0045	3,8948	3,8049	3,7299	3,6662
	0,005	10,798	7,7008	6,4760	5,8029	5,3721	5,0708	4,8473	4,6744	4,5364	4,4235	4,3295	4,2497
	0,100	3,0481	2,6682	2,4618	2,3327	2,2438	2,1783	2,1280	2,0880	2,0553	2,0282	2,0051	1,9854
	0,050	4,4940	3,6337	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413	2,6572	2,5911	2,5377	2,4935	2,4564	2,4247
16	0,025	6,1151	4,6867	4,0768	3,7294	3,5021	3,3406	3,2194	3,1248	3,0488	2,9862	2,9337	2,8891
	0,010	8,5310	6,2262	5,2922	4,7726	4,4374	4,2016	4,0259	3,8896	3,7804	3,6909	3,6162	3,5527
	0,005	10,575	7,5138	6,3034	5,6379	5,2117	4,9134	4,6920	4,5207	4,3838	4,2719	4,1785	4,0994
	0,100	3,0262	2,6446	2,4374	2,3077	2,2182	2,1524	2,1017	2,0613	2,0284	2,0009	1,9777	1,9577
	0,050	4,4513	3,5915	3,1968	2,9647	2,8100	2,6987	2,6143	2,5480	2,4943	2,4499	2,4126	2,3807
17	0,025	6,0420	4,6189	4,0112	3,6648	3,4379	3,2767	3,1556	3,0610	2,9849	2,9222	2,8696	2,8249
	0,010	8,3997	6,1121	5,1850	4,6690	4,3359	4,1015	3,9267	3,7910	3,6822	3,5931	3,5185	3,4552
	0,005	10,384	7,3536	6,1556	5,4967	5,0746	4,7789	4,5594	4,3894	4,2535	4,1424	4,0496	3,9709
	0,100	3,0070	2,6239	2,4160	2,2858	2,1958	2,1296	2,0785	2,0379	2,0047	1,9770	1,9535	1,9333
	0,050	4,4139	3,5546	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613	2,5767	2,5102	2,4563	2,4117	2,3742	2,3421
18	0,025	5,9780	4,5597	3,9539	3,6083	3,3820	3,2209	3,0999	3,0053	2,9291	2,8664	2,8137	2,7689
	0,010	8,2854	6,0129	5,0919	4,5790	4,2479	4,0146	3,8406	3,7054	3,5971	3,5082	3,4338	3,3706
	0,005	10,218	7,2148	6,0278	5,3746	4,9560	4,6627	4,4448	4,2759	4,1410	4,0305	3,9382	3,8599

Taula 10.6: Distribució F de Snedecor, $\mathcal{P}\{F_{n,m} > F_{n,m;\alpha}\}$ (continuació).

n												
13	14	15	16	17	18	20	24	30	40	60	120	∞
60,903	61,073	61,220	61,350	61,464	61,566	61,740	62,002	62,265	62,529	62,794	63,061	63,328
244,69	245,36	245,95	246,46	246,92	247,32	248,01	249,05	250,09	251,14	252,20	253,25	254,31
979,84	982,53	984,87	986,92	988,73	990,35	993,10	997,25	1001,4	1005,6	1009,8	1014,0	1018,3
6125,9	6142,7	6157,3	6170,1	6181,4	6191,5	6208,7	6234,6	6260,6	6286,8	6313,0	6339,4	6365,9
24504	24572	24630	24682	24727	24767	24836	24940	25044	25148	25253	25359	25464
9,4145	9,4200	9,4247	9,4289	9,4325	9,4358	9,4413	9,4496	9,4579	9,4662	9,4746	9,4829	9,4912
19,419	19,424	19,429	19,433	19,437	19,440	19,446	19,454	19,462	19,471	19,479	19,487	19,496
39,421	39,426	39,431	39,435	39,439	39,442	39,448	39,456	39,465	39,473	39,481	39,490	39,498
99,422	99,428	99,433	99,437	99,440	99,444	99,449	99,457	99,466	99,474	99,483	99,491	99,499
199,42	199,43	199,43	199,44	199,44	199,44	199,45	199,46	199,47	199,47	199,48	199,49	199,50
5,2098	5,2047	5,2003	5,1964	5,1929	5,1898	5,1845	5,1764	5,1681	5,1597	5,1512	5,1425	5,1337
8,7287	8,7149	8,7029	8,6923	8,6829	8,6745	8,6602	8,6385	8,6166	8,5944	8,5720	8,5494	8,5265
14,305	14,277	14,253	14,232	14,213	14,196	14,167	14,124	14,081	14,037	13,992	13,947	13,902
26,983	26,924	26,872	26,827	26,787	26,751	26,690	26,598	26,505	26,411	26,316	26,221	26,125
43,272	43,172	43,085	43,008	42,941	42,880	42,778	42,622	42,466	42,308	42,149	41,989	41,828
3,8859	3,8776	3,8704	3,8639	3,8582	3,8531	3,8443	3,8310	3,8174	3,8036	3,7896	3,7753	3,7607
5,8911	5,8734	5,8578	5,8441	5,8320	5,8211	5,8025	5,7744	5,7459	5,7170	5,6877	5,6581	5,6281
8,7150	8,6838	8,6565	8,6326	8,6113	8,5924	8,5599	8,5109	8,4613	8,4111	8,3604	8,3092	8,2573
14,306	14,249	14,198	14,154	14,115	14,079	14,020	13,929	13,838	13,745	13,652	13,558	13,463
20,603	20,515	20,438	20,371	20,311	20,258	20,167	20,030	19,892	19,752	19,611	19,468	19,325
3,2567	3,2468	3,2380	3,2303	3,2234	3,2172	3,2066	3,1905	3,1741	3,1573	3,1402	3,1228	3,1050
4,6552	4,6358	4,6188	4,6038	4,5904	4,5785	4,5581	4,5271	4,4957	4,4638	4,4314	4,3985	4,3650
6,4876	6,4556	6,4277	6,4032	6,3814	6,3619	6,3286	6,2780	6,2269	6,1750	6,1225	6,0693	6,0153
9,8248	9,7700	9,7222	9,6802	9,6429	9,6096	9,5526	9,4665	9,3793	9,2912	9,2020	9,1118	9,0204
13,293	13,215	13,146	13,086	13,033	12,985	12,903	12,780	12,656	12,530	12,402	12,274	12,143
2,8920	2,8809	2,8712	2,8626	2,8550	2,8481	2,8363	2,8183	2,8000	2,7812	2,7620	2,7423	2,7222
3,9764	3,9559	3,9381	3,9223	3,9083	3,8957	3,8742	3,8415	3,8082	3,7743	3,7398	3,7047	3,6689
5,3290	5,2968	5,2687	5,2439	5,2218	5,2021	5,1684	5,1172	5,0652	5,0125	4,9589	4,9044	4,8491
7,6575	7,6049	7,5590	7,5186	7,4827	7,4507	7,3958	7,3127	7,2285	7,1432	7,0567	6,9690	6,8800
9,9501	9,8774	9,8140	9,7582	9,7086	9,6644	9,5888	9,4742	9,3582	9,2409	9,1219	9,0015	8,8793
2,6545	2,6426	2,6322	2,6230	2,6148	2,6074	2,5947	2,5753	2,5555	2,5351	2,5142	2,4928	2,4708
3,5503	3,5292	3,5107	3,4944	3,4799	3,4669	3,4445	3,4105	3,3758	3,3404	3,3043	3,2675	3,2298
4,6285	4,5961	4,5678	4,5428	4,5206	4,5008	4,4667	4,4150	4,3624	4,3089	4,2544	4,1989	4,1423
6,4100	6,3590	6,3143	6,2750	6,2401	6,2089	6,1554	6,0743	5,9920	5,9085	5,8236	5,7373	5,6495
8,0968	8,0279	7,9678	7,9148	7,8678	7,8258	7,7540	7,6450	7,5345	7,4225	7,3087	7,1933	7,0760
2,4876	2,4752	2,4642	2,4545	2,4458	2,4381	2,4246	2,4041	2,3830	2,3614	2,3391	2,3162	2,2926
3,2590	3,2374	3,2184	3,2016	3,1867	3,1733	3,1503	3,1152	3,0794	3,0428	3,0053	2,9669	2,9276
4,1622	4,1297	4,1012	4,0761	4,0538	4,0338	3,9994	3,9472	3,8940	3,8398	3,7845	3,7279	3,6702
5,6089	5,5589	5,5151	5,4765	5,4423	5,4116	5,3591	5,2793	5,1981	5,1156	5,0316	4,9460	4,8588
6,9384	6,8721	6,8143	6,7633	6,7180	6,6775	6,6082	6,5030	6,3961	6,2875	6,1772	6,0649	5,9505
2,3640	2,3510	2,3396	2,3295	2,3205	2,3123	2,2983	2,2768	2,2547	2,2320	2,2085	2,1843	2,1592
3,0476	3,0255	3,0061	2,9890	2,9737	2,9600	2,9365	2,9005	2,8636	2,8259	2,7872	2,7475	2,7067
3,8306	3,7980	3,7694	3,7441	3,7216	3,7015	3,6669	3,6142	3,5604	3,5055	3,4493	3,3918	3,3329
5,0545	5,0052	4,9621	4,9240	4,8902	4,8599	4,8080	4,7290	4,6486	4,5667	4,4831	4,3978	4,3106
6,1530	6,0887	6,0325	5,9829	5,9388	5,8994	5,8318	5,7292	5,6248	5,5186	5,4104	5,3001	5,1875

Distribució asimptòtica Si no hi ha un estadístic de distribució coneguda per determinar la regió crítica $C = \{\Lambda < c\}$, ni és possible conèixer la distribució de Λ, aleshores es fa servir la distribució asimptòtica de Λ.
Teorema: Si θ té un recorregut en $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta | \theta_i = g_i(w_1, \dots w_q), (w_1, \dots w_q) \in \omega\}$ amb ω un conjunt obert en $\mathbb{R}^q$ i g_i amb derivades d'ordre 1 contínues, sota unes condicions de regularitat (veure [2, teorema 7.2, pàg. 294 i teorema 9.1, pàg. 395]):

$$-2\log\Lambda(x_1,\dots x_n) \xrightarrow{d} \chi^2_{k-q}$$

on k és el nombre de paràmetres prescindint de H_0, i q és el nombre de paràmetres amb H_0.

9.2 Relació entre l'estimació confidencial i el contrast d'hipòtesi

- Interval de confiança: es tracta de buscar un conjunt $S(x_1,\dots x_n) \subset \Theta$ on es compleix:

$$\mathcal{P}_\theta\{\theta \in S(x_1,\dots x_n)\} \geq 1-\alpha$$

- Contrast d'hipòtesi $H_o : \theta = \theta_0$: Es tracta de buscar una regió crítica $C(\theta_0) \subset \mathcal{X}$ de forma que obtenir una mostra en $C(\theta_0)$ succeeixi amb $\mathcal{P}_{\theta_0}\{X_1,\dots X_n \in C\} \leq \alpha$

Per tant, el conjunt de Θ:

$$S(x_1,\dots x_n) = \{\theta \in \Theta | x_1,\dots x_n \notin C(\theta)\}$$

és un interval de confiança per θ de nivell de confiança $1-\alpha$:

$$\mathcal{P}_\theta\{\theta \in S(x_1,\dots x_n)\} = \mathcal{P}_\theta\{x_1,\dots x_n \notin C(\theta)\} \geq 1-\alpha$$

Recíprocament:

$$C(\theta_0) = \{x_1,\dots x_n \in \mathcal{X} | \theta_0 \notin S(x_1,\dots x_n)\}$$

és la regió crítica d'un test de significació α per l'hipòtesi $\theta = \theta_0$:

$$\mathcal{P}_\theta\{x_1,\dots x_n \in C(\theta_0)\} = \mathcal{P}_\theta\{\theta_0 \notin S(x_1,\dots x_n)\} \leq \alpha$$

La diferència radica en que el criteri d'optimalitat d'un test uniformement de màxima potència és més precís que en l'interval de confiança. Per un interval de confiança es pot definir el concepte de precisió, de forma que l'interval de màxima precisió es correspon amb el de màxima potència del contrast, i viceversa (veure [2, pàg. 404]).

Capítol 10

Contrasts χ^2 de bondat d'ajustament

10.1 Hipòtesi simple

$H_o : F = F_0$, $H_1 : F \neq F_0$, on F_0 és una funció coneguda.

Mètode: dividir el recorregut de F en k conjunts $A_1,\dots A_k$ on $p_i^0 = \mathcal{P}_{F_o}\{A_i\}, \mathbf{p}^0 = (p_1^0,\dots p_k^0)$ i p_i la probabilitat desconeguda $p_i = \mathcal{P}_F\{A_i\}, \mathbf{p} = (p_1,\dots p_k)$. La V.A. $(N_1,\dots N_k)$ amb el nombre d'observacions en cada conjunt $A_1,\dots A_k$ té una distribució multinomial amb paràmetres n i $\mathbf{p}$:

$$\mathcal{P}\{N_1 = n_1,\dots N_k = n_k\} = \frac{n!}{n_1!\cdots n_k!} p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k} \qquad (10.1)$$

Ara substituim el contrast no paramètric inicial pel contrast paramètric $H_o : \mathbf{p} = \mathbf{p}^0$, $H_1 : \mathbf{p} \neq \mathbf{p}^0$ en base als valors obtinguts $(n_1,\dots n_k)$.
Com que els estimadors de màxima verosimilitut de $p_i i$ valen $\hat{p}_i = n_i/n$, la raó de verosimilitut val:

$$\Lambda(n_1,\dots n_k) = \frac{(p_1^0)^{n_1},\dots (p_k^0)^{n_k}}{\hat{p}_1^{n_1},\dots \hat{p}_k^{n_k}}$$

amb una regió crítica $\{\Lambda < c\}$, on la distribució asimptòtica de $-2\log\Lambda \xrightarrow{d} \chi^2_{k-1}$, donat que hi ha 0 paràmetres a estimar en H_0 i $k-1$ en H_1. En la pràctica es fa servir el test de Pearson:

$$D = -2\log\Lambda \approx \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - n p_i^0)^2}{n p_i^0} \xrightarrow{d} \chi^2_{k-1} \qquad (10.2)$$

Per tant, amb regió crítica: $\{D > \chi^2_{k-1;\alpha}\}$.
Usualment es considera que ha de ser: $n p_i \geq 5$, per tant, els conjunts han de ser $n p_i^0 \geq 5$. Per a la partició es considera $k \geq 5$, per tant, hi ha d'haver $n \geq 25$ mostres. Per a calcular D és convenient la relació:

$$D = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n p_i^0)^2}{n p_i^0} = -n + \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n p_i^0}$$

10.2 Hipòtesi composta

Quan es desconeix algun paràmetre de la distribució poblacional: $H_o : F \in \{F_\theta | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^q\}$. Ara es divideix el recorregut de F en k conjunts $A_1,\dots A_k$. Igual que abans, $(N_1,\dots N_k)$ és multinomial, però per cada valor de θ hi ha un $\mathbf{p} = \pi(\theta)$, on $p_i = \pi(\theta_1,\dots \theta_q), i = 1,\dots k$. Aplicant el principi de màxima verosimilitut, el màxim s'assoleix per $\frac{\partial}{\partial\theta}\Sigma N_i \log \pi_i(\theta)$:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{\pi_i(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta_j} \pi_i(\theta) = 0, \quad j = 1,\dots q$$

Determinats $\pi_i(\hat{\theta})$, igual que abans s'obté:

$$D = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - n\pi_i(\hat{\theta}))^2}{n\pi_i(\hat{\theta})} = -n + \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i(\hat{\theta})} \xrightarrow{d} \chi^2_{k-1-q} \qquad (10.3)$$

Per tant, amb regió crítica: $\{D > \chi^2_{k-1-q;\alpha}\}$.

10.3 Contrast d'homogeneitat

H_0: La distribució poblacional F és la mateixa per m poblacions de les que s'han pres $n_1, \ldots n_m$ mostres.
Taula de contingència:

Mostra	A_1	$\cdots$	A_k	total
1	n_{11}	$\cdots$	n_{1k}	n_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	n_{m1}	$\cdots$	n_{mk}	n_m
total	$n_{\cdot 1}$	$\cdots$	$n_{\cdot k}$	n

$$D = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_{ij} - n_i n_{\cdot j}/n)^2}{n_i n_{\cdot j}/n} = n\left(-1 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \frac{n_{ij}^2}{n_i n_{\cdot j}}\right) \xrightarrow{d} \chi^2_{(m-1)(k-1)}$$

Amb regió crítica: $\{D > \chi^2_{(m-1)(k-1);\alpha}\}$.

10.4 Contrast d'independència

Mostres: $(X_1,Y_1)\cdots(X_n,Y_n)$. Dividim el recorregut de X en k conjunts $A_1, \ldots A_k$, i el recorregut de Y en r conjunts: $B_1, \ldots B_r$. Independència $\Rightarrow p_{ij} = p_i p_j$.

Taula de contingència:

	B_1	$\cdots$	B_r	total
A_1	n_{11}	$\cdots$	n_{1k}	$n_{1\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_k	n_{m1}	$\cdots$	n_{mk}	$n_{k\cdot}$
total	$n_{\cdot 1}$	$\cdots$	$n_{\cdot r}$	n

$$D = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{(n_{ij} - n_{i\cdot} n_{\cdot j}/n)^2}{n_{i\cdot} n_{\cdot j}/n} = n\left(-1 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}\right) \xrightarrow{d} \chi^2_{(k-1)(r-1)}$$

Amb regió crítica: $\{D > \chi^2_{(k-1)(r-1);\alpha}\}$.

Bibliografia

[1] George Casella and Roger L. Berger. *Statistical Inference*. Duxbury, 2nd edition, 2002.

[2] Ricardo Vélez-Ibarrola and Alfonso García-Pérez. *Cálculo de probabilidades y estadística matemática.* Ediciones UNED, 1993.

Taula 10.6: Distribució F de Snedecor. En la taula hi ha els quantils $\mathcal{P}\{F_{n,m} > F_{n,m;\alpha}\}$.

		n											
m	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	0,100	39,864	49,500	53,593	55,833	57,240	58,204	58,906	59,439	59,858	60,195	60,473	60,705
	0,050	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	242,98	243,91
1	0,025	647,79	799,50	864,16	899,58	921,85	937,11	948,22	956,66	963,28	968,63	973,02	976,71
	0,010	4052,2	4999,5	5403,4	5624,6	5763,6	5859,0	5928,4	5981,1	6022,5	6055,9	6083,3	6106,3
	0,005	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24334	24426
	0,100	8,5263	9,0000	9,1618	9,2434	9,2926	9,3255	9,3491	9,3668	9,3805	9,3916	9,4006	9,4081
	0,050	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,329	19,353	19,371	19,385	19,396	19,405	19,413
2	0,025	38,506	39,000	39,166	39,248	39,298	39,331	39,355	39,373	39,387	39,398	39,407	39,415
	0,010	98,502	99,000	99,166	99,249	99,299	99,333	99,356	99,374	99,388	99,399	99,408	99,416
	0,005	198,50	199,00	199,17	199,25	199,30	199,33	199,36	199,38	199,39	199,40	199,41	199,42
	0,100	5,5383	5,4624	5,3908	5,3426	5,3092	5,2847	5,2662	5,2517	5,2400	5,2304	5,2224	5,2156
	0,050	10,128	9,5521	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8867	8,8452	8,8123	8,7855	8,7633	8,7446
3	0,025	17,443	16,044	15,439	15,101	14,885	14,735	14,624	14,540	14,473	14,419	14,374	14,337
	0,010	34,116	30,817	29,457	28,710	28,237	27,911	27,672	27,489	27,345	27,229	27,133	27,052
	0,005	55,552	49,799	47,467	46,195	45,392	44,839	44,434	44,126	43,882	43,686	43,524	43,387
	0,100	4,5448	4,3246	4,1909	4,1072	4,0506	4,0098	3,9790	3,9549	3,9357	3,9199	3,9067	3,8955
	0,050	7,7086	6,9443	6,5914	6,3882	6,2561	6,1631	6,0942	6,0410	5,9988	5,9644	5,9358	5,9117
4	0,025	12,218	10,649	9,9792	9,6045	9,3645	9,1973	9,0741	8,9796	8,9047	8,8439	8,7935	8,7512
	0,010	21,198	18,000	16,694	15,977	15,522	15,207	14,976	14,799	14,659	14,546	14,452	14,374
	0,005	31,333	26,284	24,259	23,154	22,456	21,975	21,622	21,352	21,139	20,967	20,824	20,705
	0,100	4,0604	3,7797	3,6195	3,5202	3,4530	3,4045	3,3679	3,3393	3,3163	3,2974	3,2816	3,2682
	0,050	6,6079	5,7861	5,4094	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725	4,7351	4,7040	4,6777
5	0,025	10,007	8,4336	7,7636	7,3879	7,1464	6,9777	6,8531	6,7572	6,6810	6,6192	6,5678	6,5245
	0,010	16,258	13,274	12,060	11,392	10,967	10,672	10,456	10,289	10,158	10,051	9,9627	9,8883
	0,005	22,785	18,314	16,530	15,556	14,940	14,513	14,200	13,961	13,772	13,618	13,491	13,384
	0,100	3,7759	3,4633	3,2888	3,1808	3,1075	3,0545	3,0145	2,9830	2,9577	2,9369	2,9195	2,9047
	0,050	5,9874	5,1433	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2067	4,1468	4,0990	4,0600	4,0274	3,9999
6	0,025	8,8131	7,2599	6,5988	6,2272	5,9876	5,8198	5,6955	5,5996	5,5234	5,4613	5,4098	5,3662
	0,010	13,745	10,925	9,7795	9,1483	8,7459	8,4661	8,2600	8,1016	7,9761	7,8741	7,7896	7,7183
	0,005	18,635	14,544	12,917	12,027	11,464	11,073	10,786	10,566	10,392	10,250	10,133	10,034
	0,100	3,5894	3,2574	3,0741	2,9605	2,8833	2,8274	2,7849	2,7516	2,7247	2,7025	2,6839	2,6681
	0,050	5,5915	4,7374	4,3468	4,1203	3,9715	3,8660	3,7870	3,7257	3,6767	3,6365	3,6030	3,5747
7	0,025	8,0727	6,5415	5,8898	5,5226	5,2852	5,1186	4,9949	4,8993	4,8232	4,7611	4,7095	4,6658
	0,010	12,246	9,5466	8,4513	7,8467	7,4604	7,1914	6,9928	6,8400	6,7188	6,6201	6,5382	6,4691
	0,005	16,236	12,404	10,882	10,050	9,5221	9,1553	8,8854	8,6781	8,5138	8,3803	8,2697	8,1764
	0,100	3,4579	3,1131	2,9238	2,8064	2,7264	2,6683	2,6241	2,5894	2,5612	2,5380	2,5185	2,5020
	0,050	5,3177	4,4590	4,0662	3,8378	3,6875	3,5806	3,5005	3,4381	3,3881	3,3472	3,3129	3,2839
8	0,025	7,5709	6,0595	5,4160	5,0526	4,8173	4,6517	4,5286	4,4333	4,3572	4,2951	4,2434	4,1997
	0,010	11,259	8,6491	7,5910	7,0061	6,6318	6,3707	6,1776	6,0289	5,9106	5,8143	5,7343	5,6667
	0,005	14,688	11,042	9,5965	8,8051	8,3018	7,9520	7,6941	7,4959	7,3386	7,2106	7,1045	7,0149
	0,100	3,3603	3,0065	2,8129	2,6927	2,6106	2,5509	2,5053	2,4694	2,4403	2,4163	2,3961	2,3789
	0,050	5,1174	4,2565	3,8626	3,6331	3,4817	3,3737	3,2927	3,2296	3,1789	3,1373	3,1025	3,0730
9	0,025	7,2093	5,7147	5,0781	4,7181	4,4844	4,3197	4,1970	4,1020	4,0260	3,9639	3,9121	3,8682
	0,010	10,561	8,0215	6,9919	6,4221	6,0569	5,8018	5,6129	5,4671	5,3511	5,2565	5,1779	5,1114
	0,005	13,614	10,107	8,7171	7,9559	7,4712	7,1338	6,8849	6,6933	6,5411	6,4172	6,3142	6,2274

Nota: Per valors de $\alpha > 0{,}5$ tenir en compte que $F_{n,m;\alpha} = 1/F_{m,n;1-\alpha}$.

Taula 10.5: Distribució Binomial, $\mathcal{P}\{X \leq k\}$ (continuació).

		p											
n	k	0,01	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
16	0	0,8515	0,6143	0,4401	0,1853	0,0743	0,0281	0,0100	0,0033	0,0010	$0{,}0^{3}3$	$0{,}0^{4}7$	$0{,}0^{4}2$
	1	0,9891	0,9182	0,8108	0,5147	0,2839	0,1407	0,0635	0,0261	0,0098	0,0033	0,0010	$0{,}0^{3}3$
	2	0,9995	0,9887	0,9571	0,7892	0,5614	0,3518	0,1971	0,0994	0,0451	0,0183	0,0066	0,0021
	3	1,0000	0,9989	0,9930	0,9316	0,7899	0,5981	0,4050	0,2459	0,1339	0,0651	0,0281	0,0106
	4	1,0000	0,9999	0,9991	0,9830	0,9209	0,7982	0,6302	0,4499	0,2892	0,1666	0,0853	0,0384
	5	1,0000	1,0000	0,9999	0,9967	0,9765	0,9183	0,8103	0,6598	0,4900	0,3288	0,1976	0,1051
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9944	0,9733	0,9204	0,8247	0,6881	0,5272	0,3660	0,2272
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9989	0,9930	0,9729	0,9256	0,8406	0,7161	0,5629	0,4018
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9985	0,9925	0,9743	0,9329	0,8577	0,7441	0,5982
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9984	0,9929	0,9771	0,9417	0,8759	0,7728
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9938	0,9809	0,9514	0,8949
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9951	0,9851	0,9616
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9991	0,9965	0,9894
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9979
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
17	0	0,8429	0,5958	0,4181	0,1668	0,0631	0,0225	0,0075	0,0023	$0{,}0^{3}7$	$0{,}0^{3}2$	$0{,}0^{4}4$	$0{,}0^{5}8$
	1	0,9877	0,9091	0,7922	0,4818	0,2525	0,1182	0,0501	0,0193	0,0067	0,0021	$0{,}0^{3}6$	$0{,}0^{3}1$
	2	0,9994	0,9866	0,9497	0,7618	0,5198	0,3096	0,1637	0,0774	0,0327	0,0123	0,0041	0,0012
	3	1,0000	0,9986	0,9912	0,9174	0,7556	0,5489	0,3530	0,2019	0,1028	0,0464	0,0184	0,0064
	4	1,0000	0,9999	0,9988	0,9779	0,9013	0,7582	0,5739	0,3887	0,2348	0,1260	0,0596	0,0245
	5	1,0000	1,0000	0,9999	0,9953	0,9681	0,8943	0,7653	0,5968	0,4197	0,2639	0,1471	0,0717
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9992	0,9917	0,9623	0,8929	0,7752	0,6188	0,4478	0,2902	0,1662
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9891	0,9598	0,8954	0,7872	0,6405	0,4743	0,3145
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9974	0,9876	0,9597	0,9006	0,8011	0,6626	0,5000
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9969	0,9873	0,9617	0,9081	0,8166	0,6855
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9968	0,9880	0,9652	0,9174	0,8338
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9970	0,9894	0,9699	0,9283
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9975	0,9914	0,9755
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9981	0,9936
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9988
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
18	0	0,8345	0,5780	0,3972	0,1501	0,0536	0,0180	0,0056	0,0016	$0{,}0^{3}4$	$0{,}0^{3}1$	$0{,}0^{4}2$	$0{,}0^{5}4$
	1	0,9862	0,8997	0,7735	0,4503	0,2241	0,0991	0,0395	0,0142	0,0046	0,0013	$0{,}0^{3}3$	$0{,}0^{4}7$
	2	0,9993	0,9843	0,9419	0,7338	0,4797	0,2713	0,1353	0,0600	0,0236	0,0082	0,0025	$0{,}0^{3}7$
	3	1,0000	0,9982	0,9891	0,9018	0,7202	0,5010	0,3057	0,1646	0,0783	0,0328	0,0120	0,0038
	4	1,0000	0,9999	0,9985	0,9718	0,8794	0,7164	0,5187	0,3327	0,1886	0,0942	0,0411	0,0154
	5	1,0000	1,0000	0,9998	0,9936	0,9581	0,8671	0,7175	0,5344	0,3550	0,2088	0,1077	0,0481
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9882	0,9487	0,8610	0,7217	0,5491	0,3743	0,2258	0,1189
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9973	0,9837	0,9431	0,8593	0,7283	0,5634	0,3915	0,2403
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9957	0,9807	0,9404	0,8609	0,7368	0,5778	0,4073
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9946	0,9790	0,9403	0,8653	0,7473	0,5927
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9939	0,9788	0,9424	0,8720	0,7597
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9986	0,9938	0,9797	0,9463	0,8811
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9986	0,9942	0,9817	0,9519
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9951	0,9846
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9962
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999

Apèndixs

A. Taules d'algunes distribucions

Taula 10.1: Distribució normal $N(0,1)$. En la taula hi ha les probabilitats $\mathcal{P}\{Z > z_\alpha\}$.

z_α	..0	..1	..2	..3	..4	..5	..6	..7	..8	..9
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0570	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0515	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0238	0,0233
2,0	0,0227	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0135	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,0014	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
3,1	0,0010	$0{,}0^{3}93$	$0{,}0^{3}90$	$0{,}0^{3}87$	$0{,}0^{3}84$	$0{,}0^{3}81$	$0{,}0^{3}78$	$0{,}0^{3}76$	$0{,}0^{3}73$	$0{,}0^{3}71$
3,2	$0{,}0^{3}68$	$0{,}0^{3}66$	$0{,}0^{3}64$	$0{,}0^{3}61$	$0{,}0^{3}59$	$0{,}0^{3}57$	$0{,}0^{3}55$	$0{,}0^{3}53$	$0{,}0^{3}51$	$0{,}0^{3}50$
3,3	$0{,}0^{3}48$	$0{,}0^{3}46$	$0{,}0^{3}45$	$0{,}0^{3}43$	$0{,}0^{3}41$	$0{,}0^{3}40$	$0{,}0^{3}39$	$0{,}0^{3}37$	$0{,}0^{3}36$	$0{,}0^{3}34$
3,4	$0{,}0^{3}33$	$0{,}0^{3}32$	$0{,}0^{3}31$	$0{,}0^{3}30$	$0{,}0^{3}29$	$0{,}0^{3}28$	$0{,}0^{3}27$	$0{,}0^{3}26$	$0{,}0^{3}25$	$0{,}0^{3}24$
3,5	$0{,}0^{3}23$	$0{,}0^{3}22$	$0{,}0^{3}21$	$0{,}0^{3}20$	$0{,}0^{3}20$	$0{,}0^{3}19$	$0{,}0^{3}18$	$0{,}0^{3}17$	$0{,}0^{3}17$	$0{,}0^{3}16$
3,6	$0{,}0^{3}15$	$0{,}0^{3}15$	$0{,}0^{3}14$	$0{,}0^{3}14$	$0{,}0^{3}13$	$0{,}0^{3}13$	$0{,}0^{3}12$	$0{,}0^{3}12$	$0{,}0^{3}11$	$0{,}0^{3}11$

Notació: $0{,}0^{4}72$ representa el número 0,000072.

Taula 10.2: Distribució χ^2 de Pearson. En la taula hi ha els quantils $\mathcal{P}\{\chi^2_n > \chi^2_{n;\alpha}\}$.

	Regió crítica, α											
n	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0,7	0,3	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	$0{,}0^{4}4$	$0{,}0^{3}2$	0,001	0,004	0,016	0,148	1,074	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,713	2,408	4,605	5,991	7,378	9,210	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,424	3,665	6,251	7,815	9,348	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	2,195	4,878	7,779	9,488	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	3,000	6,064	9,236	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,828	7,231	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	4,671	8,383	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	5,527	9,524	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	6,393	10,66	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	7,267	11,78	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	8,148	12,90	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	9,034	14,01	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	9,926	15,12	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	10,82	16,22	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,72	17,32	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	12,62	18,42	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,09	13,53	19,51	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,86	14,44	20,60	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,844	7,633	8,907	10,12	11,65	15,35	21,69	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,434	8,260	9,591	10,85	12,44	16,27	22,77	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,034	8,897	10,28	11,59	13,24	17,18	23,86	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,643	9,542	10,98	12,34	14,04	18,10	24,94	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,260	10,20	11,69	13,09	14,85	19,02	26,02	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,886	10,86	12,40	13,85	15,66	19,94	27,10	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	20,87	28,17	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	21,79	29,25	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	22,72	30,32	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	23,65	31,39	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	24,58	32,46	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	25,51	33,53	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
31	14,46	15,66	17,54	19,28	21,43	26,44	34,60	41,42	44,99	48,23	52,19	55,00
32	15,13	16,36	18,29	20,07	22,27	27,37	35,66	42,58	46,19	49,48	53,49	56,33
33	15,82	17,07	19,05	20,87	23,11	28,31	36,73	43,75	47,40	50,73	54,78	57,65
34	16,50	17,79	19,81	21,66	23,95	29,24	37,80	44,90	48,60	51,97	56,06	58,96
35	17,19	18,51	20,57	22,47	24,80	30,18	38,86	46,06	49,80	53,20	57,34	60,27
36	17,89	19,23	21,34	23,27	25,64	31,12	39,92	47,21	51,00	54,44	58,62	61,58
37	18,59	19,96	22,11	24,07	26,49	32,05	40,98	48,36	52,19	55,67	59,89	62,88
38	19,29	20,69	22,88	24,88	27,34	32,99	42,05	49,51	53,38	56,90	61,16	64,18
39	20,00	21,43	23,65	25,70	28,20	33,93	43,11	50,66	54,57	58,12	62,43	65,48
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	34,87	44,16	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
41	21,42	22,91	25,21	27,33	29,91	35,81	45,22	52,95	56,94	60,56	64,95	68,05
42	22,14	23,65	26,00	28,14	30,77	36,75	46,28	54,09	58,12	61,78	66,21	69,34
43	22,86	24,40	26,79	28,96	31,63	37,70	47,34	55,23	59,30	62,99	67,46	70,62
44	23,58	25,15	27,57	29,79	32,49	38,64	48,40	56,37	60,48	64,20	68,71	71,89
45	24,31	25,90	28,37	30,61	33,35	39,58	49,45	57,51	61,66	65,41	69,96	73,17
46	25,04	26,66	29,16	31,44	34,22	40,53	50,51	58,64	62,83	66,62	71,20	74,44
47	25,77	27,42	29,96	32,27	35,08	41,47	51,56	59,77	64,00	67,82	72,44	75,70
48	26,51	28,18	30,75	33,10	35,95	42,42	52,62	60,91	65,17	69,02	73,68	76,97
49	27,25	28,94	31,55	33,93	36,82	43,37	53,67	62,04	66,34	70,22	74,92	78,23
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	44,31	54,72	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49

Taula 10.5: Distribució Binomial, $\mathcal{P}\{X \leq k\}$ (continuació).

		p											
n	k	0,01	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
	0	0,8775	0,6730	0,5133	0,2542	0,1209	0,0550	0,0238	0,0097	0,0037	0,0013	$0{,}0^{3}4$	$0{,}0^{3}1$
	1	0,9928	0,9436	0,8646	0,6213	0,3983	0,2336	0,1267	0,0637	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017
	2	0,9997	0,9938	0,9755	0,8661	0,6920	0,5017	0,3326	0,2025	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112
	3	1,0000	0,9995	0,9969	0,9658	0,8820	0,7473	0,5843	0,4206	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461
	4	1,0000	1,0000	0,9997	0,9935	0,9658	0,9009	0,7940	0,6543	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334
	5	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9925	0,9700	0,9198	0,8346	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987	0,9930	0,9757	0,9376	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000
13	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9944	0,9818	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	0	0,8687	0,6528	0,4877	0,2288	0,1028	0,0440	0,0178	0,0068	0,0024	$0{,}0^{3}8$	$0{,}0^{3}2$	$0{,}0^{4}6$
	1	0,9916	0,9355	0,8470	0,5846	0,3567	0,1979	0,1010	0,0475	0,0205	0,0081	0,0029	$0{,}0^{3}9$
	2	0,9997	0,9923	0,9699	0,8416	0,6479	0,4481	0,2811	0,1608	0,0839	0,0398	0,0170	0,0065
	3	1,0000	0,9994	0,9958	0,9559	0,8535	0,6982	0,5213	0,3552	0,2205	0,1243	0,0632	0,0287
	4	1,0000	1,0000	0,9996	0,9908	0,9533	0,8702	0,7415	0,5842	0,4227	0,2793	0,1672	0,0898
	5	1,0000	1,0000	1,0000	0,9985	0,9885	0,9561	0,8883	0,7805	0,6405	0,4859	0,3373	0,2120
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9978	0,9884	0,9617	0,9067	0,8164	0,6925	0,5461	0,3953
14	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9976	0,9897	0,9685	0,9247	0,8499	0,7414	0,6047
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9978	0,9917	0,9757	0,9417	0,8811	0,7880
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9983	0,9940	0,9825	0,9574	0,9102
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9989	0,9961	0,9886	0,9713
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9978	0,9935
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9991
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	0	0,8601	0,6333	0,4633	0,2059	0,0874	0,0352	0,0134	0,0047	0,0016	$0{,}0^{3}5$	$0{,}0^{3}1$	$0{,}0^{4}3$
	1	0,9904	0,9270	0,8290	0,5490	0,3186	0,1671	0,0802	0,0353	0,0142	0,0052	0,0017	$0{,}0^{3}5$
	2	0,9996	0,9906	0,9638	0,8159	0,6042	0,3980	0,2361	0,1268	0,0617	0,0271	0,0107	0,0037
	3	1,0000	0,9992	0,9945	0,9444	0,8227	0,6482	0,4613	0,2969	0,1727	0,0905	0,0424	0,0176
	4	1,0000	0,9999	0,9994	0,9873	0,9383	0,8358	0,6865	0,5155	0,3519	0,2173	0,1204	0,0592
	5	1,0000	1,0000	0,9999	0,9978	0,9832	0,9389	0,8516	0,7216	0,5643	0,4032	0,2608	0,1509
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9964	0,9819	0,9434	0,8689	0,7548	0,6098	0,4522	0,3036
15	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9958	0,9827	0,9500	0,8868	0,7869	0,6535	0,5000
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9958	0,9848	0,9578	0,9050	0,8182	0,6964
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9963	0,9876	0,9662	0,9231	0,8491
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9972	0,9907	0,9745	0,9408
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9981	0,9937	0,9824
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9963
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Taula 10.5: Distribució Binomial, $\mathcal{P}\{X \leq k\}$ (continuació).

		p											
n	*k*	0,01	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
9	0	0,9135	0,7602	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1	0,9966	0,9718	0,9288	0,7748	0,5995	0,4362	0,3003	0,1960	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2	0,9999	0,9980	0,9916	0,9470	0,8591	0,7382	0,6007	0,4628	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3	1,0000	0,9999	0,9994	0,9917	0,9661	0,9144	0,8343	0,7297	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9944	0,9804	0,9511	0,9012	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9969	0,9900	0,9747	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0	0,9044	0,7374	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,9957	0,9655	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2	0,9999	0,9972	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3	1,0000	0,9999	0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4	1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
11	0	0,8953	0,7153	0,5688	0,3138	0,1673	0,0859	0,0422	0,0198	0,0088	0,0036	0,0014	$0,0^35$
	1	0,9948	0,9587	0,8981	0,6974	0,4922	0,3221	0,1971	0,1130	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2	0,9998	0,9963	0,9848	0,9104	0,7788	0,6174	0,4552	0,3127	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3	1,0000	0,9998	0,9984	0,9815	0,9306	0,8389	0,7133	0,5696	0,4255	0,2963	0,1911	0,1133
	4	1,0000	1,0000	0,9999	0,9972	0,9841	0,9496	0,8854	0,7897	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9973	0,9883	0,9657	0,9218	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9980	0,9924	0,9784	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0	0,8864	0,6938	0,5404	0,2824	0,1422	0,0687	0,0317	0,0138	0,0057	0,0022	$0,0^38$	$0,0^32$
	1	0,9938	0,9514	0,8816	0,6590	0,4435	0,2749	0,1584	0,0850	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032
	2	0,9998	0,9952	0,9804	0,8891	0,7358	0,5583	0,3907	0,2528	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193
	3	1,0000	0,9997	0,9978	0,9744	0,9078	0,7946	0,6488	0,4925	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730
	4	1,0000	1,0000	0,9998	0,9957	0,9761	0,9274	0,8424	0,7237	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938
	5	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9954	0,9806	0,9456	0,8822	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9961	0,9857	0,9614	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9972	0,9905	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Taula 10.3: Distribució t de Student, $\mathcal{P}\{t_n > t_{n;\alpha}\}$.

	Regió crítica, α								
n	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	127,30
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09
3	0,277	0,584	0,979	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598
5	0,267	0,559	0,919	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690
10	0,260	0,541	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581
11	0,260	0,540	0,875	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428
13	0,259	0,537	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030
31	0,256	0,530	0,853	1,309	1,696	2,040	2,453	2,744	3,022
32	0,256	0,530	0,853	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,015
33	0,255	0,529	0,853	1,308	1,692	2,035	2,445	2,733	3,008
34	0,255	0,529	0,852	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,002
35	0,255	0,529	0,852	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	2,996
36	0,255	0,529	0,852	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	2,990
37	0,255	0,529	0,851	1,305	1,687	2,026	2,431	2,715	2,985
38	0,255	0,529	0,851	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	2,980
39	0,255	0,529	0,851	1,304	1,685	2,023	2,426	2,708	2,976
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	2,971
50	0,255	0,528	0,849	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	2,937
60	0,255	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	2,915
80	0,254	0,526	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	2,887
120	0,254	0,526	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	2,860
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807

Taula 10.4: Distribució de Poisson. En la taula hi ha les probabilitats $\mathcal{P}\{X \leq k\} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$.

	k											
λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,1	0,9048	0,9953	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	0,8187	0,9825	0,9989	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,3	0,7408	0,9631	0,9964	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,4	0,6703	0,9384	0,9921	0,9992	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,5	0,6065	0,9098	0,9856	0,9982	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,6	0,5488	0,8781	0,9769	0,9966	0,9996	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,7	0,4966	0,8442	0,9659	0,9942	0,9992	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,8	0,4493	0,8088	0,9526	0,9909	0,9986	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,9	0,4066	0,7725	0,9371	0,9865	0,9977	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,0	0,3679	0,7358	0,9197	0,9810	0,9963	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,1	0,3329	0,6990	0,9004	0,9743	0,9946	0,9990	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,2	0,3012	0,6626	0,8795	0,9662	0,9923	0,9985	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,3	0,2725	0,6268	0,8571	0,9569	0,9893	0,9978	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,4	0,2466	0,5918	0,8335	0,9463	0,9857	0,9968	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,5	0,2231	0,5578	0,8088	0,9344	0,9814	0,9955	0,9991	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,6	0,2019	0,5249	0,7834	0,9212	0,9763	0,9940	0,9987	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,7	0,1827	0,4932	0,7572	0,9068	0,9704	0,9920	0,9981	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
1,8	0,1653	0,4628	0,7306	0,8913	0,9636	0,9896	0,9974	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
1,9	0,1496	0,4337	0,7037	0,8747	0,9559	0,9868	0,9966	0,9992	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000
2,0	0,1353	0,4060	0,6767	0,8571	0,9473	0,9834	0,9955	0,9989	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000
2,2	0,1108	0,3546	0,6227	0,8194	0,9275	0,9751	0,9925	0,9980	0,9995	0,9999	1,0000	1,0000
2,4	0,0907	0,3084	0,5697	0,7787	0,9041	0,9643	0,9884	0,9967	0,9991	0,9998	1,0000	1,0000
2,6	0,0743	0,2674	0,5184	0,7360	0,8774	0,9510	0,9828	0,9947	0,9985	0,9996	0,9999	1,0000
2,8	0,0608	0,2311	0,4695	0,6919	0,8477	0,9349	0,9756	0,9919	0,9976	0,9993	0,9998	1,0000
3,0	0,0498	0,1991	0,4232	0,6472	0,8153	0,9161	0,9665	0,9881	0,9962	0,9989	0,9997	0,9999
3,2	0,0408	0,1712	0,3799	0,6025	0,7806	0,8946	0,9554	0,9832	0,9943	0,9982	0,9995	0,9999
3,4	0,0334	0,1468	0,3397	0,5584	0,7442	0,8705	0,9421	0,9769	0,9917	0,9973	0,9992	0,9998
3,6	0,0273	0,1257	0,3027	0,5152	0,7064	0,8441	0,9267	0,9692	0,9883	0,9960	0,9987	0,9996
3,8	0,0224	0,1074	0,2689	0,4735	0,6678	0,8156	0,9091	0,9599	0,9840	0,9942	0,9981	0,9994
4,0	0,0183	0,0916	0,2381	0,4335	0,6288	0,7851	0,8893	0,9489	0,9786	0,9919	0,9972	0,9991
5,0	0,0067	0,0404	0,1247	0,2650	0,4405	0,6160	0,7622	0,8666	0,9319	0,9682	0,9863	0,9945
6,0	0,0025	0,0174	0,0620	0,1512	0,2851	0,4457	0,6063	0,7440	0,8472	0,9161	0,9574	0,9799
7,0	$0{,}0^391$	0,0073	0,0296	0,0818	0,1730	0,3007	0,4497	0,5987	0,7291	0,8305	0,9015	0,9467
8,0	$0{,}0^333$	0,0030	0,0138	0,0424	0,0996	0,1912	0,3134	0,4530	0,5925	0,7166	0,8159	0,8881
9,0	$0{,}0^312$	0,0012	0,0062	0,0212	0,0550	0,1157	0,2068	0,3239	0,4557	0,5874	0,7060	0,8030
10,0	$0{,}0^445$	$0{,}0^349$	0,0028	0,0103	0,0293	0,0671	0,1301	0,2202	0,3328	0,4579	0,5830	0,6968

	k											
λ	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
5,0	0,9980	0,9993	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6,0	0,9912	0,9964	0,9986	0,9995	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7,0	0,9730	0,9872	0,9943	0,9976	0,9990	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8,0	0,9362	0,9658	0,9827	0,9918	0,9963	0,9984	0,9993	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
9,0	0,8758	0,9261	0,9585	0,9780	0,9889	0,9947	0,9976	0,9989	0,9996	0,9998	0,9999	1,0000
10,0	0,7916	0,8645	0,9165	0,9513	0,9730	0,9857	0,9928	0,9965	0,9984	0,9993	0,9997	0,9999

Taula 10.5: Distribució Binomial. En la taula hi ha les probabilitats $\mathcal{P}\{X \leq k\} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$.

		p											
n	k	0,01	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9900	0,9700	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0	0,9801	0,9409	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,9999	0,9991	0,9975	0,9900	0,9775	0,9600	0,9375	0,9100	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0	0,9703	0,9127	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,9997	0,9974	0,9928	0,9720	0,9393	0,8960	0,8438	0,7840	0,7183	0,6480	0,5747	0,5000
	2	1,0000	1,0000	0,9999	0,9990	0,9966	0,9920	0,9844	0,9730	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0	0,9606	0,8853	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,9994	0,9948	0,9860	0,9477	0,8905	0,8192	0,7383	0,6517	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2	1,0000	0,9999	0,9995	0,9963	0,9880	0,9728	0,9492	0,9163	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9984	0,9961	0,9919	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0	0,9510	0,8587	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0312
	1	0,9990	0,9915	0,9774	0,9185	0,8352	0,7373	0,6328	0,5282	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2	1,0000	0,9997	0,9988	0,9914	0,9734	0,9421	0,8965	0,8369	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9978	0,9933	0,9844	0,9692	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9976	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0	0,9415	0,8330	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,9985	0,9875	0,9672	0,8857	0,7765	0,6554	0,5339	0,4202	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2	1,0000	0,9995	0,9978	0,9841	0,9527	0,9011	0,8306	0,7443	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987	0,9941	0,9830	0,9624	0,9295	0,8826	0,8208	0,7447	0,6562
	4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9954	0,9891	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0	0,9321	0,8080	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1	0,9980	0,9829	0,9556	0,8503	0,7166	0,5767	0,4449	0,3294	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2	1,0000	0,9991	0,9962	0,9743	0,9262	0,8520	0,7564	0,6471	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3	1,0000	1,0000	0,9998	0,9973	0,9879	0,9667	0,9294	0,8740	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9953	0,9871	0,9712	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9962	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0	0,9227	0,7837	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1	0,9973	0,9777	0,9428	0,8131	0,6572	0,5033	0,3671	0,2553	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2	0,9999	0,9987	0,9942	0,9619	0,8948	0,7969	0,6785	0,5518	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3	1,0000	0,9999	0,9996	0,9950	0,9786	0,9437	0,8862	0,8059	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9971	0,9896	0,9727	0,9420	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9958	0,9887	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000