Apunts de programació matemàtica lineal

Llorenç Cerdà-Alabern
llorenc@ac.upc.edu

Barcelona, febrer de 2009.

Índex

Prefaci

Vaig escriure aquests apunts mentre preparava l'assignatura *Programación Matemática* del curs 2008-09 de la carrera de matemàtiques de la UNED. Els apunts estan basats fonamentalment en el llibre de l'assignatura [2], el W. Winston [3] i el D.G. Luenberger [1], i editats amb LaTeX.

Notació: Els vectors son vectors columna, i es representen amb minúscules en negreta ($\boldsymbol{x}$). Les matrius es representen amb majúscules en negreta ($\mathbf{A}$). $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ vol dir traspost, de manera que $\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2$ és el producte escalar dels vectors $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2$.

Capítol 1

Model de programació lineal

Problema: maximitzar (o minimitzar) una “funció objectiu” z lineal subjecta a unes restriccions (*constraints*):

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1 x_1 + \cdots c_k x_k \\ \text{s.a} \quad & a_{11} x_1 + \cdots \; a_{1k} x_k = b_1 \\ & \cdots \\ & a_{l1} x_1 + \cdots \; a_{lk} x_k \leq b_l \\ & \cdots \\ & a_{m1} x_1 + \cdots a_{mk} x_k \geq b_m \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Aquest problema es pot reescriure en la “forma estàndard”, on només hi ha restriccions d’igualtat i on totes les variables $x_i \geq 0$. Per això:

1. Si hi ha variables $x_j \leq 0$, aleshores cal substituir $x_j = -x'_j$, $x'_j \geq 0$.
2. Si hi ha variables x_j no restringides en signe (*unrestricted in sign*), aleshores cal substituir $x_j = x'_j - x''_j$; $x'_j, x''_j \geq 0$. En la solució serà $x'_j = 0$, $x''_j > 0$ si $x_j < 0$; $x'_j > 0$, $x''_j = 0$ si $x_j > 0$; i $x'_j = x''_j = 0$ si $x_j = 0$.
3. Les desigualtats $\leq$ es poden convertir en igualtats afegint variables de folgança o separació (*slack*) amb signe $+$: $a_{l1} x_1 + \cdots a_{lk} x_k \leq b_l \Rightarrow a_{l1} x_1 + \cdots a_{lk} x_k + x_{k+p} = b_l$, $x_{k+p} \geq 0$.
4. Les desigualtats $\geq$ es poden convertir en igualtats afegint variables de folgança amb signe $-$ (anomenades també variables d’excés): $a_{m1} x_1 + \cdots a_{mk} x_k \geq b_m \Rightarrow a_{m1} x_1 + \cdots a_{mk} x_k - x_{k+q} = b_m$, $x_{k+q} \geq 0$.

En la forma estàndard el problema és:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1 x_1 + \cdots c_n x_n \\ \text{s.a} \quad & a_{11} x_1 + \cdots \; a_{1n} x_n = b_1 \\ & \cdots \\ & a_{m1} x_1 + \cdots a_{mn} x_n = b_m \\ & x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Notar que hi ha coeficients c_i, a_{ij} que poden valer 0 o ser negatius. En forma matricial ($\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ vol dir trasposta i $\boldsymbol{x} \geq 0$ vol dir que totes les components x_i del vector $\boldsymbol{x}$ són $x_i \geq 0$):

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}_{n\times 1} \boldsymbol{x}_{n\times 1} \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{A}_{m\times n} \boldsymbol{x}_{n\times 1} = \mathbf{b}_{m\times 1} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

1.1 Solució del model de programació lineal

El sistema d’equacions (1.2) representa la intersecció d’hiperplans i semiespais, i per tant, és un conjunt convex (un polítop), anomenat regió factible.

Qualsevol $\boldsymbol{x}$ que satisfà les restriccions de (1.2) s’anomena solució factible.

Lema 1.1.1 El conjunt de totes les solucions factibles és un conjunt convex.

Demostració. Si $\boldsymbol{x}_i$, $i = 1, \cdots n$ son solucions factibles, aleshores la seva combinació convexa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots \lambda_m \boldsymbol{x}_m \\ \lambda_1 + \cdots \lambda_m = 1 \end{aligned}$$

també és una solució factible, doncs:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1 \mathbf{A}\boldsymbol{x}_1 + \cdots \lambda_m \mathbf{A}\boldsymbol{x}_m = \lambda_1 \mathbf{b} + \cdots \lambda_m \mathbf{b} = \mathbf{b} \qquad \square$$

Per tant, el polítop $\mathcal{P}$ que formen les restriccions es pot expressar com a la combinació convexa de les solucions factibles. En concret, si $\mathcal{P}$ està acotat (és un políedre), aleshores $\mathcal{P}$ és l’envolupant convexa dels seus punts extrems.

Segons si $\mathcal{P}$ està acotat, i la seva intersecció amb l’hiperplà que representa la funció objectiu, es pot donar un dels següents quatre casos per la solució del problema de programació lineal (1.2):

1. Que hi hagi una solució única (un únic punt extrem).
2. Que hi hagi infinites solucions (dos o més punts extrem son solució).
3. Que no hi hagi solució (si la regió factible està buida).
4. Que la solució no estigui acotada.

A continuació suposarem que la regió factible $\mathcal{P}$ està acotada.

Teorema 1.1.1 La funció objectiu assoleix el màxim en un punt extrem

Demostració. Siguin $\boldsymbol{x}_i, i = 1, \cdots n$ els punts extrems. Qualsevol punt de $\mathcal{P}$ es pot expressar com a combinació convexa de $\boldsymbol{x}_i$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots \lambda_m \boldsymbol{x}_m \\ \lambda_1 + \cdots \lambda_m &= 1 \end{aligned}$$

Multiplicant per $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ tenim:

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \lambda_1 \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_1 + \cdots \lambda_m \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_m$$

Sigui: $z_0 = \max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_i, i = 1, \cdots m\}$. Aleshores:

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \lambda_1 \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_1 + \cdots \lambda_m \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_m \leq \lambda_1 z_0 + \cdots \lambda_m z_0 = z_0$$

Per tant, el màxim, z_0, s'assoleix en algun dels punts extrems $\boldsymbol{x}_i, i = 1, \cdots n$. ☐

Teorema 1.1.2 Si el màxim s'assoleix en més d'un punt extrem, aleshores, s'assoleix en qualsevol combinació convexa d'aquests

Demostració. Sigui el màxim: $z_0 = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_j, i = 1, \cdots k$, per tant: $\lambda_1 \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_1 + \cdots \lambda_k \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_k = z_0(\lambda_1 + \cdots \lambda_k) = z_0$. ☐

1.2 Solucions factibles bàsiques

El rang de la matriu $\mathbf{A}_{m\times n}$ del problema de programació lineal (1.2) val m (altrament hi ha restriccions que són combinació lineals de les altres, i es poden eliminar). Podem formar doncs la matriu $\mathbf{B}_{m\times m}$ no singular amb m columnes linealment independents de $\mathbf{A}_{m\times n}$, i resoldre el sistema d'equacions:

$$\mathbf{B}_{m\times m} \boldsymbol{x}_{B(m\times 1)} = \mathbf{b}_{m\times 1} \tag{1.3}$$

Que tindrà per solució:

$$\boldsymbol{x}_{B(m\times 1)} = \mathbf{B}^{-1}_{m\times m} \mathbf{b}_{m\times 1} = \hat{\mathbf{b}}_{m\times 1} \tag{1.4}$$

Si ordenem les equacions de (1.2) de forma que les m columnes que hem agafat siguin les m primeres columnes de la matriu $\mathbf{A}_{m\times n}$, aleshores tindrem:

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{m\times m} & \mathbf{N}_{m\times(n-m)} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{x}_{(n\times 1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{B(m\times 1)} \\ \boldsymbol{x}_{N((n-m)\times 1)} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

De forma que podem reescriure l'equació $\mathbf{A}_{m\times n} \boldsymbol{x}_{n\times 1} = \mathbf{b}_{m\times 1}$ en la forma:

$$\mathbf{B}_{m\times m} \boldsymbol{x}_{B(m\times 1)} + \mathbf{N}_{m\times(n-m)} \boldsymbol{x}_{N((n-m)\times 1)} = \mathbf{b}_{m\times 1} \tag{1.7}$$

Clarament, el vector:

$$\boldsymbol{x}_{(n\times 1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{B(m\times 1)} \\ \boldsymbol{x}_{N((n-m)\times 1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_{m\times 1} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times 1} \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

on $\mathbf{0}_{(n-m)\times 1}$ és un vector de $(n-m)$ zeros, és una solució del sistema d'equacions (1.7). La solució s'anomena "solució bàsica" de (1.2); les variables que formen $\boldsymbol{x}_{B(m\times 1)}$ s'anomenen "variables bàsiques" de la solució, i les que formen $\boldsymbol{x}_{N((n-m)\times 1)}$ s'anomenen "variables no bàsiques". A més, si $\hat{\mathbf{b}}_{m\times 1} \geq 0$, aleshores aquest valor de $\boldsymbol{x}_{(n\times 1)}$ és una solució factible bàsica de (1.2).

Teorema 1.2.1 Els punts extrems son solucions factibles bàsiques

Demostració. Podem comprovar que una solució factible bàsica no es pot expressar com a combinació convexa d'altres dos punts diferents de $\mathcal{P}$, per tant, és un punt extrem. Recíprocament, qualsevol punt extrem amb m components diferents de 0 es pot expressar com a combinació lineal de m columnes de $\mathbf{A}_{m\times n}$, que donen lloc a una solució factible bàsica. ☐

Del resultat anterior deduïm el següent teorema:

Teorema 1.2.2 Teorema fonamental de la programació lineal

1. Si existeix una solució factible, aleshores existeix una solució factible bàsica.
2. Si existeix una solució factible òptima, existeix una solució factible bàsica òptima.

1.3 Costos reduïts

Si reescrivim el problema de programació lineal (1.2) amb la partició de la matriu de restriccions que hem fet en la secció 1.2 ($\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \left[\begin{smallmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{smallmatrix}\right]$) tindrem:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_B + \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_N && (1.9) \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{B}\boldsymbol{x}_B + \mathbf{N}\boldsymbol{x}_N = \mathbf{b} && (1.10) \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Notar que, per simplificar la notació, a partir d'ara deixarem d'indicar les dimensions de les matrius i els vectors. Si substituïm la solució bàsica (equació (1.8)) en la funció objectiu, tindrem el valor: $\hat{z} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$. Ara ens demanen què valdrà la funció objectiu si modifiquem lleugerament el valor de les variables no bàsiques, de forma que la solució sigui factible (les restriccions (1.10) es compleixen). Ho podem calcular multiplicant (1.10) per $\mathbf{B}^{-1}$, aïllant $\boldsymbol{x}_B$ i substituint en (1.9):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\boldsymbol{x}_N &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \boldsymbol{x}_B &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\boldsymbol{x}_N \\ z &= \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\boldsymbol{x}_N \qquad (1.11) \end{aligned}$$

Definim el vector:

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \qquad (1.12)$$

Notar que la component r_{x_i} de $\boldsymbol{r}$ que multiplica la variable no bàsica x_i és:

$$r_{x_i} = c_{x_i} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{x_i} \qquad (1.13)$$

on c_{x_i} és el coeficient que multiplica x_i en la funció objectiu, i $\mathbf{a}_{x_i}$ és la columna de la matriu $\mathbf{A}$ que multiplica x_i.

Els coeficients r_{x_i} tenen una important rellevància perquè ens donen el criteri d'optimalitat de la solució factible. El motiu és el següent: Suposem que el problema és de maximització. Suposem una solució bàsica factible (en la que les variables bàsiques valen ≥ 0 i les no bàsiques valen 0). Si per aquesta solució es compleix: $r_{x_i} \leq 0$, aleshores augmentar lleugerament alguna de les variables no bàsiques $\boldsymbol{x}_N$ reduirà el valor de la funció objectiu z. Per tant, entrar alguna de les variables no bàsiques en la base portarà a una solució pitjor, i concloem que la solució bàsica factible és òptima.

Degut a la importància del vector (1.12), es fa servir el nom “costos reduïts” (*reduced costs*) per referir-se als coeficients (1.13). Una possible explicació d'aquest nom (que serveix com a mnemotècnic de la fórmula (1.13)), és que els cost de la variable no bàsica (c_{x_i}) es veu “reduït” per la quantitat $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{x_i}$.

Observacions

- En la definició dels costos reduïts hi ha una discrepància entre el llibre de D.G. Luenberger [1] i els llibres de W. Wiston [3] i la UNED [2]: Mentre el primer els defineix com s'ha explicat en aquesta secció, els altres dos els defineixen com els coeficients que multipliquen les variables en la funció objectiu escrita en la forma: $z - (\mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\boldsymbol{x}_N = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. És a dir, defineix els costos reduïts com els de l'equació (1.12) canviats de signe.

  El motiu és que al construir les taules símplex que s'expliquen en la secció 2.1, el llibre de Winston i la UNED fan servir la funció objectiu escrita en la forma $z - (\mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\boldsymbol{x}_N = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. És a dir, es canvia el signe dels coeficients de la funció objectiu quan es posen en la taula símplex, de manera que en la taula símplex òptima es llegeix el valor que assoleix la funció objectiu: $z = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. En el llibre de Luenberger, en canvi, en la taula símplex es posa la funció objectiu escrita en la forma: $(\mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\boldsymbol{x}_N = z - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. És a dir, en la taula símplex els coeficients de la funció objectiu es posen amb el mateix signe, de manera que el valor que es llegeix en la taula òptima ($-\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$), és el valor que assoleix la funció objectiu canviat de signe.

  Respecte la notació, en el llibre de Luenberger i la UNED es defineix $z_i = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{x_i}$. De manera que en el Luenberger es fa servir la notació $c_i - z_i$ per identificar el cost reduït de la variable x_i. En el llibre de la UNED, en canvi, es fa servir la notació $z_i - c_i$ per el motiu explicat anteriorment.

- En aquests apunts resoldrem les taules símplex (veure la secció 2.1) tal com s'explica en el llibre de Winston, però respectarem la definició dels costos reduïts que dóna el llibre de Luenberger (equació (1.12)).

Capítol 2

Mètode símplex

2.1 Sumari de l'algorisme

Suposem un problema de maximització:

1. Expressar el problema amb la forma estàndard i de forma que hi aparegui una solució bàsica factible (si hi ha m restriccions, hi ha d'haver m columnes en la matriu de restriccions que tinguin un “pivot”, és a dir, un únic coeficient > 0):

$$\begin{array}{ll} \max & z = c_1x_1 + \cdots c_nx_n \\ \mathrm{s.a} & a_{11}x_1 + \cdots \ a_{1n}x_n = b_1 \\ & \qquad \cdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots \ a_{mn}x_n = b_m \\ & \qquad\qquad x_i \geq 0 \end{array}$$

2. Escriure la taula símplex. En la “fila 0” hi ha els coeficients de la funció objectiu escrita en la forma $z - c_1x_1 - \cdots c_nx_n = 0$. La columna de la variable z no cal posar-la perquè sempre valdrà $\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$:

x_1	x_2	$\cdots$	x_n	b
$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0
a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$\cdots$				
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m

3. Si tots els coeficients de la fila 0 son ≥ 0, aleshores la taula símplex és òptima. Altrament:

(a) Triar com a variable no bàsica x_j que entra en la base, aquella que té el coeficient de la fila 0 més negatiu (produeix l'increment major en la funció objectiu).

(b) x_j pot augmentar mentre les altres variables bàsiques x_i compleixin $x_i \geq 0$. Com que en la fila i tindrem l'equació $\hat{a}_{ii}x_i + \hat{a}_{ij}x_j = \hat{b}_i$, $\hat{a}_{ii} > 0$, $\hat{b}_i \geq 0$, perquè sigui $x_i \geq 0$, haurà de ser: $x_j \leq \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}}$, $\hat{a}_{ij} > 0$. (Nota: Posem el barret ($\hat{a}_{ii}$, $\hat{a}_{ij}$, $\hat{b}_i$) perquè al iterar, els coeficients ja no seran els del problema inicial). Això porta a triar com a pivot en la columna j, el de la fila i que té el quocient menor:

$$\min_{\substack{i \\ \hat{a}_{ij}>0}} \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}} \tag{2.1}$$

Això garanteix que la solució bàsica sigui factible: $x_k \geq 0$, $\forall k$. Al deixar com a pivot aquest element, x_j passarà a ser una variable bàsica, i hi haurà una altra variable que ho haurà deixat de ser: la que abans tenia un pivot en la fila i; x_i.

4. Pivotar en la columna j, fila i, i tornar a iterar el punt 3.

Observacions

- És possible que al formular el problema en la forma estàndard no s'obtingui una taula símplex amb una solució factible bàsica. Això pot passar, per exemple, quan en el problema original hi ha restriccions del tipus $=$. El mètode de les penalitzacions, o el mètode de les dues fases explicats en el capítol 3 permeten resoldre aquest tipus de problemes.

- Si el Problema és de minimització, aleshores entraran com a variables bàsiques les més positives de la fila 0, i la taula serà òptima quan tots els coeficients de la fila 0 siguin ≤ 0.

- Notar que els coeficients de la fila 0 valdran 0 per les variables bàsiques (excepte la variable z, que no posem en la taula perquè sempre serà el pivot de la fila 0), i son els coeficients del vector de costos reduïts canviats de signe (equació (1.12)) per les variables no bàsiques. Determinar el valor dels coeficients de les variables no bàsiques de la fila 0 en les successives iteracions del mètode símplex, sol anomenar-se *pricing out*.

- Amb la definició dels costos reduïts de l'equació (1.12), els costos reduïts son els coeficients a la dreta de la funció objectiu, per tant, el criteri d'optimalitat és el contrari que en la taula símplex, on els coeficients de la fila 0 son els coeficients a l'esquerra de funció objectiu . És a dir, el criteri d'optimalitat és:
  - Costos reduïts ≤ 0 per un problema de maximització, o bé, ≥ 0 per un problema de minimització.
  - Coeficients de la fila 0 de la taula símplex ≥ 0 per un problema de maximització, o bé, ≤ 0 per un problema de minimització.

Exemple 2.1.1 Mètode símplex

$$\begin{array}{rl} \max & z = 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

- En la forma estàndard:

$$\begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + s_1 = 12 \\ 4x_1 + x_2 + s_2 = 10 \\ x_1 + x_2 + s_3 = 3 \\ x_i, s_i \geq 0 \end{array}$$

- La taula símplex és:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
-5	-3	0	0	0	0
4	2	1	0	0	12
$\boxed{4}$	1	0	1	0	10
1	1	0	0	1	3

- Entra x_1 amb el pivot indicat (a l'esquerra poso el factor pel que es multiplica la fila del pivot):

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
5/4	0	$-7/4$	0	5/4	0	25/2
-1	0	1	1	-1	0	2
	4	1	0	1	0	10
$-1/4$	0	$\boxed{3/4}$	0	$-1/4$	1	1/2

- Entra x_2:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
7/3	0	0	0	2/3	7/3	41/3
$-4/3$	0	0	1	$-2/3$	$-4/3$	4/3
$-4/3$	4	0	0	4/3	$-4/3$	28/3
	0	3/4	0	$-1/4$	1	1/2

- Com que els coeficients de la fila 0 són ≥ 0, concloem que la taula és òptima, i el resultat és: $z = 41/3$, les variables bàsiques són: $s_1 = 4/3, x_1 = 7/3, x_2 = 2/3$, i les no bàsiques: $s_2 = s_3 = 0$. ■

Múltiples solucions Suposem que en la taula òptima hi hagués una variable no bàsica que tingués un coeficient $= 0$ en la fila 0 (és a dir, una variable amb un cost reduït $= 0$). Si fos possible obtenir una solució factible entrant aquesta variable com a bàsica, com que no faria falta modificar la fila 0, obtindríem una solució que també seria òptima, perquè la funció objectiu assoliria el mateix valor.

Solució no acotada Suposem que en l'exemple anterior haguéssim arribat a la taula:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
0	$-7/4$	0	$5/4$	0	$25/2$
0	-1	1	-1	0	2
4	-1	0	1	0	10
0	$-3/4$	0	$-1/4$	1	$1/2$

En aquest cas, al intentar entrar x_2 com a variable bàsica, ens trobaríem que els quocients b_k/a_{ki} son tots negatius. Per tant, la variable x_2 podria ser tant gran com desitgéssim.

Solució factible bàsica degenerada es diu quan una o més variables bàsiques son $= 0$. Quan passa això, el mètode símplex pot ser ineficient, o tenir cicles: És a dir, arribar a una mateixa taula després de diverses iteracions, i no arribar mai a la solució.

2.2 Cicles i tècniques de pertorbació

Si es dóna una solució bàsica factible degenerada (una o més variables bàsiques son $= 0$) poden aparèixer cicles.

La interpretació d'una solució bàsica factible degenerada és la següent: Sigui $\boldsymbol{x}_B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_m \end{bmatrix}$ la solució factible bàsica. Aleshores es compleix $\mathbf{B}\boldsymbol{x}_B = \mathbf{b}$, que ho podem escriure com $x_1\,\mathbf{a}_1 + \cdots x_m\,\mathbf{a}_m = \mathbf{b}$. Si la solució és degenerada, és perquè el vector $\mathbf{b}$ es troba en algun dels hiperplans del con convex definit pels vectors bàsics $\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_m$.

Per evitar els cicles es poden fer servir tècniques de pertorbació (modificar lleugerament $\mathbf{b}$ perquè la solució no sigui degenerada), o tècniques lexicogràfiques (veure [2] per més detalls).

Capítol 3

Variables artificials i mètode símplex revisat

Per aplicar el mètode símplex, necessitem començar amb una solució factible bàsica. Si aquesta no s'obté després d'afegir les variables de folgança, es poden seguir els mètodes de les seccions 3.1 i 3.2 per aconseguir-la.

3.1 Mètode de les penalitzacions (*the big M method*)

La idea és afegir variables artificials amb un coeficient M molt gran en la funció objectiu, que condueixi a triar la variable artificial com a variable no bàsica. L'algorisme és el següent:

1. Modificar les restriccions perquè tots els temes independents siguin positius: $b_i \geq 0$.
2. Convertir a la forma estàndard afegint variables de folgança o d'excés.
3. Afegir una variable artificial a_i per a cada restricció que abans de la forma estàndard era $=$ o $\geq$.
4. Per a cada variable artificial a_i, afegir $-M a_i$ a la dreta de la funció objectiu si el problema és de maximització, o $M a_i$ si és de minimització.
5. Eliminar les M de la funció objectiu i seguir amb el mètode símplex.
6. Si alguna de les variables artificials queda amb un coeficient diferent de 0, el problema no té solució factible.

Notar que un cop una variable artificial deixa de ser bàsica, es pot eliminar de la taula (deixar de fer operacions en la seva columna en les pròximes taules).

Exemple 3.1.1 Mètode de les penalitzacions

$$\begin{array}{rl} \max & z = 5x_1 - x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

La taula símplex és:

x_1	x_2	a_1	s_1	s_2	b
-5	2	M	0	0	0
2	1	$\boxed{1}$	0	0	6
1	1	0	1	0	4
1	2	0	0	1	5

Operant:

	x_1	x_2	a_1	s_1	s_2	b
$-M$	$-5-2M$	$2-M$	0	0	0	$-6M$
	$\boxed{2}$	1	1	0	0	6
	1	1	0	1	0	4
	1	2	0	0	1	5
$\frac{5+2M}{2}$	0	$9/2$	$\frac{5+2M}{2}$	0	0	15
	2	1	1	0	0	6
$-1/2$	0	$1/2$	$-1/2$	1	0	1
$-1/2$	0	$3/2$	$-1/2$	0	1	2

La solució és doncs: $z = 15$, $x_1 = 3$, $x_2 = a_1 = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$. ■

3.2 Mètode de les dues fases

1. En la primera fase es canvia la funció objectiu original per una funció objectiu igual a la suma de les variables artificials. Seguidament es resol el problema de minimització d'aquesta nova funció objectiu (independentment de si el problema original era de max. o min.). Igual que en el mètode anterior, es planteja la taula símplex i es començа eliminant les variables artificials de la fila 0 per aconseguir una solució bàsica amb l'ajut de les variables artificials. Seguidament es continua amb el símplex fins aconseguir la taula òptima.

2. En la segona fase s'eliminen les columnes de les variables artificials (perquè seran variables no bàsiques), es substitueix la funció objectiu de la fase 1 per la funció objectiu original i s'aplica un altre cop l'algorisme de símplex pel problema max. o min. original.

Exemple 3.2.1 Mètode de les dues fases
Resoldrem l'exemple 3.1.1 pel mètode de les dues fases. Primer afegiríem les variables de folgança i artificials, igual que amb el mètode de les penalitzacions. Després plantejaríem la minimització de $w = a_1$. La taula símplex seria:

x_1	x_2	a_1	s_1	s_2	b
0	0	-1	0	0	0
2	1	$\boxed{1}$	0	0	6
1	1	0	1	0	4
1	2	0	0	1	5

Eliminant les variables artificials de la fila 0:

x_1	x_2	a_1	s_1	s_2	b
2	1	0	0	0	6
$\boxed{2}$	1	1	0	0	6
1	1	0	1	0	4
1	2	0	0	1	5

Continuem amb el símplex:

	x_1	x_2	a_1	s_1	s_2	b
-1	0	0	-1	0	0	0
	2	1	1	0	0	6
$-1/2$	0	$1/2$	$-1/2$	1	0	1
$-1/2$	0	$3/2$	$-1/2$	0	1	2

Com que la taula és òptima, eliminem la columna de a_1 i continuem amb la segona fase:

	x_1	x_2	s_1	s_2	b
	-5	2	0	0	0
	$\boxed{2}$	1	0	0	6
	0	$1/2$	1	0	1
	0	$3/2$	0	1	2
$5/2$	0	$9/2$	0	0	15
	2	1	0	0	6
	0	$1/2$	1	0	1
	0	$3/2$	0	1	2

i arribem a la mateixa taula òptima i solució que amb el mètode de les penalitzacions. ■

3.3 Mètode símplex revisat

Recordem de la secció 1.3, pàg. 3 que en el model de programació lineal podem definir un conjunt de variables bàsiques, $\boldsymbol{x}_B$ i no bàsiques $\boldsymbol{x}_N$ que permeten expressar el problema en la següent forma matricial:

$$\max \quad z = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B + \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \tag{3.1}$$

$$\text{s.a} \quad \mathbf{B}\boldsymbol{x}_B + \mathbf{N}\boldsymbol{x}_N = \mathbf{b} \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{x} \geq 0$$

Multiplicant (3.2) per $\mathbf{B}^{-1}$, aïllant $\boldsymbol{x}_B$ i substituint en (3.1) tenim:

$$\boldsymbol{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\boldsymbol{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\boldsymbol{x}_N$$

$$z - (\mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathrm{N})\boldsymbol{x}_N = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \tag{3.4}$$

On definim el vector de costos reduïts (equació (1.12)):

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \tag{3.5}$$

Comparant amb la taula del mètode símplex, podem identificar que, donat un conjunt de variables bàsiques $\boldsymbol{x}_B$ i no bàsiques $\boldsymbol{x}_N$:

1. Els coeficients que multipliquen les variables no bàsiques en la funció objectiu son els costos reduïts canviats de signe. Notar que el cost reduït d'una una variable no bàsica x_i (r_i) amb coeficient c_i en la funció objectiu i columna $\mathbf{a}_i$ en la matriu $\mathbf{N}$ serà:

$$r_i = c_i - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_i \tag{3.6}$$

2. El valor de la funció objectiu agafant $\boldsymbol{x}_N = \mathbf{0}$ és:

$$\hat{z} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \tag{3.7}$$

3. Els coeficients que multipliquen les variables no bàsiques $\boldsymbol{x}_N$ en el sistema d'equacions de les restriccions son:

$$\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \tag{3.8}$$

4. Els valors dels termes independents en el sistema d'equacions (solució del sistema agafant $\boldsymbol{x}_N = \mathbf{0}$) son:

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \tag{3.9}$$

Això permet aplicar el següent mètode "símplex revisat", on només cal tenir emmagatzemats els coeficients inicials del problema, i calcular iterativament les $\mathbf{B}^{-1}$ que resulten de considerar diferents conjunts de variables bàsiques i no bàsiques. D'aquesta manera, quan s'aplica el mètode amb un computador, es poden reduir la quantitat de càlculs i memòria necessària.

1. Calcular els costos reduïts de les variables no bàsiques en la funció objectiu (equació (3.5)). Si $\boldsymbol{r} \le 0$ i el problema és de maximització, o $\boldsymbol{r} \ge 0$ i el problema és de minimització, aleshores la solució és òptima. El valor òptim de la funció objectiu ve donat per (3.7) i el valor de les variables bàsiques per (3.9).

2. Si el problema és de maximització, agafar el coeficient de (3.5) més positiu per saber quina variable entra en la base. Si entra x_j, aleshores de (3.8) deduïm que els coeficients que multipliquen x_j en el sistema d'equacions son:

$$\hat{\mathbf{a}}_j = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j \tag{3.10}$$

   on $\mathbf{a}_j$ son els coeficients que multipliquen x_j en el problema inicial, és a dir, la columna j de la matriu $\mathbf{A}$ del problema de programació lineal. A partir de (3.9) i (3.10) triem la variable que surt de la base, és a dir, triem el pivot:

$$\min_{\substack{i \\ \hat{a}_{ij} > 0}} \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}}$$

3. Calculem $\mathbf{B}^{-1}$ per a la pròxima iteració a partir de les operacions elementals que hem de fer per a introduir el pivot segons (3.10). Tornem al punt 1.

Observacions

- Per identificar les variables bàsiques ($\boldsymbol{x}_B$) i no bàsiques ($\boldsymbol{x}_N$) convé fer servir dos conjunts ordenats: VB i VNB respectivament. Els conjunts VB i VNB serviran per identificar les variables a les que corresponen les columnes de les matrius $\mathbf{B}^{-1}$ i $\mathbf{N}$; i dels vectors $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$ i $\mathbf{c}_N^{\mathrm{T}}$. És molt important mantenir l'ordre dels conjunts VB i VNB: La variable que entra en la base ha d'ocupar la posició en VB de la variable que surt, i viceversa.

Exemple 3.3.1 Mètode símplex revisat
Ara resoldrem l'exemple 2.1.1, pàg. 5 amb el mètode símplex revisat:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & 4x_1 + 2x_2 \le 12 \\ & 4x_1 + x_2 \le 10 \\ & x_1 + x_2 \le 3 \\ & x_i \ge 0 \end{aligned}$$

Iteració 1 Les variables bàsiques son VB=$\{s_1, s_2, s_3\}$ i les no bàsiques VNB=$\{x_1, x_2\}$. Per tant:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_n^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Del vector $\boldsymbol{r}$ deduïm que x_1 entra en la base. De:

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ \boxed{4} \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \ = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

deduïm que surt s_2 perquè $\min\{12/4, 10/4, 3/1\} = 10/4$.

Iteració 2 Les variables bàsiques son VB=$\{s_1, x_1, s_3\}$ i les no bàsiques VNB=$\{s_2, x_2\}$. Amb el pivot calculat anteriorment, calculem $\mathbf{B}^{-1}$ (hi ha que restar la fila 2 a la fila 1; dividir la fila 2 per 4; i restar 1/4 de la fila 2 a la fila 3):

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_n^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -5/4 & 7/4 \end{bmatrix}$$

Del vector $\boldsymbol{r}$ deduïm que x_2 entra en la base. De:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \\ \boxed{3/4} \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \ = \begin{bmatrix} 2 \\ 10/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

deduïm que surt s_3.

Iteració 3 Les variables bàsiques son VB=$\{s_1, x_1, x_2\}$ i les no bàsiques VNB=$\{s_2, s_3\}$. Amb el pivot calculat anteriorment, calculem $\mathbf{B}^{-1}$:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 4/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_n^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -2/3 & -7/3 \end{bmatrix}$$

Del vector $\boldsymbol{r}$ deduïm que la solució és la òptima, i el valor de les variables bàsiques i funció objectiu és:

$$\boldsymbol{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 7/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \ z = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = 41/3 \qquad \blacksquare$$

Capítol 4

Dualitat

Un problema de maximització té associat un de minimització i viceversa. Al problema de partida l'anomenarem "primal" i a l'associat "dual". Adoptarem la notació z, x_i per les variables de problema de maximització i w, y_i per el de minimització.

4.1 Forma simètrica

Al problema de max. escrit en la forma "normal" següent:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + \cdots c_nx_n \\ \text{s.a} \quad & a_{11}x_1 + \cdots \ a_{1n}x_n \le b_1 \\ & \cdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots \ a_{mn}x_n \le b_m \\ & x_i \ge 0 \end{aligned}$$

li correspon el problema de min. "normal" dual:

$$\begin{aligned} \min \quad & w = b_1y_1 + \cdots b_my_m \\ \text{s.a} \quad & a_{11}y_1 + \cdots \ a_{m1}y_m \ge c_1 \\ & \cdots \\ & a_{1n}y_1 + \cdots \ a_{nm}y_m \ge c_n \\ & y_i \ge 0 \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{array}{llll} & \text{primal} & & \text{dual} \\ \max & z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \min & w = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{s.a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} \le \mathbf{b} & \text{s.a} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \ge \mathbf{c} \\ & \boldsymbol{x} \ge 0 & & \boldsymbol{y} \ge 0 \end{array} \tag{4.1}$$

Observacions

- Notar que en la forma "normal" el problema de maximització està lligat a una restricció del tipus: $\mathbf{A}\boldsymbol{x} \le \mathbf{b}$ ($\mathbf{b}$ és una cota superior), i el problema de minimització està lligat a una restricció del tipus: $\mathbf{A}\boldsymbol{x} \ge \mathbf{b}$ ($\mathbf{b}$ és una cota inferior).

  Si el problema primal està en la forma:

  $$\begin{aligned} \min \quad & z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{x} \le \mathbf{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge 0 \end{aligned}$$

  S'hauria de fer la transformació:

  $$\begin{aligned} \min \quad & z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.a} \quad & -\mathbf{A}\boldsymbol{x} \ge -\mathbf{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge 0 \end{aligned}$$

  Abans d'obtenir el dual.

4.2 Forma asimètrica

Qualsevol problema de programació lineal es pot convertir en la forma "normal" i trobar el seu dual. Per exemple, si el problema està en la forma estàndard:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge 0 \end{aligned}$$

Es pot reescriure com:

$$\begin{array}{ll} \max & z=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x}\le \mathbf{b} \\ & -\mathbf{A}\boldsymbol{x}\le -\mathbf{b} \\ & \boldsymbol{x}\ge 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \max & z=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.a} & \begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ -\mathbf{A}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\le\begin{bmatrix}\mathbf{b}\\ -\mathbf{b}\end{bmatrix} \\ & \boldsymbol{x}\ge 0\end{array}$$

Que té per dual:

$$\begin{array}{ll} \min & w=\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} \\ \text{s.a} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\ge \mathbf{c} \\ & \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\ge 0 \end{array}$$

On s'ha particionat el vector dual en $\begin{bmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Si ara definim $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$, arribem a la forma asimètrica:

$$\begin{array}{ll} & \text{primal} \\ \max & z=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{b} \\ & \boldsymbol{x}\ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & \text{dual} \\ \min & w=\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{s.a} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\ge \mathbf{c} \\ & \end{array} \tag{4.2}$$

on el vector $\boldsymbol{y}$ no està restringit en signe.

Observació: tenint en compte que $(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, la forma dual també es pot formular com:

$$\begin{array}{ll} \min & w=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \\ \text{s.a} & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\ge \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \end{array}$$

4.3 Relacions entre el primal i el dual

Lema 4.3.1 Relació entre les solucions factibles del primal i dual.
Si $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ son respectivament solucions factibles del problema primal i dual (4.2), aleshores:

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\ge \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \tag{4.3}$$

Demostració.

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\ge \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{x}\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\ge \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \qquad \square$$

Corol·lari 4.3.1 Si $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ son respectivament solucions factibles del problema primal i dual (4.2) i a més:

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \tag{4.4}$$

aleshores son solucions òptimes.

Teorema 4.3.1 Teorema de la dualitat

1. Si el primal o dual té solució òptima finita, l'altre també la té i la funció objectiu té el mateix valor.
2. Si el primal o dual no està acotat, aleshores l'altre no té solució factible.

Teorema 4.3.2 Solució del problema dual a partir del primal
Si la solució factible bàsica òptima del problema primal té la base $\mathbf{B}$, aleshores la solució del problema dual és:

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}=\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1} \tag{4.5}$$

Demostració. Sabem que si la solució és òptima: $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ (donat que $(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ i que $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ és un escalar). A més: $\boldsymbol{x}=\left[\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_B\\ \mathbf{0}\end{smallmatrix}\right]$, on $\boldsymbol{x}_B=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ (equació (3.3), pàg. 7). Per tant: $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B=\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$, d'on $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}=\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}$. ☐

Lectura de la solució del problema dual en la taula del primal

La solució del problema dual (equació (4.5)) es pot llegir directament de la solució símplex del primal: Per tenir una solució bàsica factible inicial, en la matriu $\mathbf{A}_{m\times n}$ del problema símplex primal hi tindrem la matriu identitat $\mathbf{I}_{m\times m}$ (possiblement haurem afegit variables de folgança). Siguin $\boldsymbol{x}_I$ les variables que que corresponen a la matriu $\mathbf{I}$. Els coeficients que multipliquen aquestes variables en la taula òptima serà $\mathbf{B}^{-1}I=\mathbf{B}^{-1}$, on $\mathbf{B}^{-1}$ és la base que correspon a la solució òptima. A més, els coeficients que multiplicaran les variables $\boldsymbol{x}_I$ en la fila 0 seran els costos reduïts d'aquestes variables (equació (1.12)) canviats de signe: $\hat{\mathbf{c}}_I^{\mathrm{T}}=-\mathbf{r}_I^{\mathrm{T}}=-(\mathbf{c}_I^{\mathrm{T}}-\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I})=-(\mathbf{c}_I^{\mathrm{T}}-\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1})=-(\mathbf{c}_I^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})$. Per tant:

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}=\mathbf{c}_I^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{c}}_I^{\mathrm{T}} \tag{4.6}$$

on $\mathbf{c}_I^{\mathrm{T}}$ son els coeficients que multipliquen les variables $\boldsymbol{x}_I$ en la taula inicial, i $\hat{\mathbf{c}}_I^{\mathrm{T}}$ son els coeficients que multipliquen les variables $\boldsymbol{x}_I$ en la taula òptima. Notar que en general el conjunt de variables no bàsiques no coincidirà amb les variables que formen $\boldsymbol{x}_I$.

Teorema 4.3.3 Folgança complementària
Aquest teorema el podem trobar enunciat en les dues maneres que es donen a continuació. La primera es pot trobar, per exemple, en el llibre de Winston [3], la segona el el llibre de Luenberger [1] i la UNED [2]

Considerem el problema primal de maximització i dual de minimització en la forma simètrica (4.1). A les restriccions $\leq$ del primal correspondran variables de folgança s_i i a les restriccions $\geq$ del dual correspondran variables d'excés e_i. Si $\boldsymbol{x}$ és la solució òptima del primal, i $\boldsymbol{y}$ és la solució òptima del dual, aleshores:

$$\begin{aligned} s_i y_i &= 0 \\ e_i x_i &= 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Demostració. Donat que que el coeficient de la variable de folgança s_i en la funció objectiu $c_{s_i} = 0$, si la variable s_i no ha sortit de la base serà: $\hat{c}_{s_i} = 0$, i per tant, de (4.6) $y_i = 0$. Si s_i ha sortit de la base, aleshores s_i és una variable no bàsica, i per tant, $s_i = 0$, que prova la primera relació. Amb un raonament semblant podem deduir la segona relació. ☐

La segona manera en que podem trobar enunciat aquest teorema diu així: Siguin $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ dues solucions factibles per el primal i dual respectivament escrits en la forma asimètrica (4.2). Aleshores una condició necessària i suficient perquè $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ siguin les solucions òptimes és que:

$$\begin{aligned} x_i > 0 \Rightarrow \quad & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{a}_i = c_i \\ x_i = 0 \Leftarrow \quad & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{a}_i > c_i \end{aligned} \tag{4.8}$$

On c_i son els coeficients de la funció objectiu i $\mathbf{a}_i$ és la columna i de la matriu de coeficients de les restriccions, $\mathbf{A}$.

Demostració. Les dues condicions de (4.8) impliquen que $(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x} = 0$, per tant, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$, i per el corol·lari 4.3.1, pàg. 10 son òptimes. Per altra banda, si les solucions són òptimes, aleshores es compleix $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ i, per tant, $(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x} = 0$. Com que $\boldsymbol{x} \geq 0$ i $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \mathbf{c}$ (veure (4.2)), concloem que es compleix (4.8). ☐

Si el primal i dual estan en la forma simètrica (4.1), aleshores una condició necessària i suficient perquè $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ siguin les solucions òptimes és que:

$$\begin{aligned} x_i > 0 \Rightarrow \quad & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{a}_i = c_i \\ x_i = 0 \Leftarrow \quad & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{a}_i > c_i \\ y_j > 0 \Rightarrow \quad & \mathbf{a}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = b_j \\ y_j = 0 \Leftarrow \quad & \mathbf{a}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} < b_j \end{aligned} \tag{4.9}$$

On b_j son els termes independents de les restriccions i $\mathbf{a}_j^{\mathrm{T}}$ és la fila j de la matriu de coeficients de les restriccions, $\mathbf{A}$.

Exemple 4.3.1 Relació entre el primal i dual
Suposem el problema primal:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & x_1 \leq 40 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Aplicant el mètode símplex:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
-3	-2	0	0	0	0
2	1	1	0	0	100
1	1	0	1	0	80
$\boxed{1}$	0	0	0	1	40
0	-2	0	0	3	120
0	$\boxed{1}$	1	0	-2	20
0	1	0	1	-1	40
1	0	0	0	1	40
0	0	2	0	-1	160
0	1	1	0	-2	20
0	0	-1	1	$\boxed{1}$	20
1	0	0	0	1	40
0	0	1	1	0	180
0	1	-1	2	0	60
0	0	-1	1	1	20
1	0	1	-1	0	20

D'on llegim la solució: $z = 180$, $x_1 = 20$, $x_2 = 60$, i la solució del dual: $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \mathbf{c}_I^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{c}}_I^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Si ara resolem el problema dual:

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 100y_1 + 80y_2 + 40y_3 \\ \text{s.a} \quad & 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + y_2 \geq 2 \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$

y_1	y_2	y_3	e_1	e_2	a_1	a_2	b
-100	-80	-40	0	0	$-M$	$-M$	0
2	1	1	-1	0	1	0	3
1	1	0	0	-1	0	1	2
$-100+3M$	$-80+2M$	$-40+M$	$-M$	$-M$	0	0	$5M$
2	1	1	-1	0	1	0	3
1	$\boxed{1}$	0	0	-1	0	1	2
$-20+M$	0	$-40+M$	$-M$	$-80+M$	0	$80-2M$	$160+M$
$\boxed{1}$	0	1	-1	1	1	-1	1
1	1	0	0	-1	0	1	2
0	0	-20	-20	-60	$20-M$	$60-M$	180
1	0	1	-1	1	1	-1	1
0	1	-1	1	-2	-1	2	1

Podem comprovar que la solució és $z = 180, y_1 = 1, y_2 = 1, y_3 = 0$. A més, també podem aplicar l'equació (4.6), on les variables $\mathbf{x}_I$ son a_1, a_2, per tant: $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{c}_I^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{c}}_I^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} M & M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20-M & 60-M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 60 \end{bmatrix}$, tal com havíem obtingut anteriorment. Observació: De les variables e_1, e_2 també podem llegir la solució del primal canviada de signe $\begin{bmatrix} -20 & -60 \end{bmatrix}$, perquè els coeficients inicials d'aquestes variables és $-\mathbf{I}$.

També podem comprovar que es compleix el teorema de folgança complementària: $e_1 = e_2 = 0$, per tant, $e_1 x_1 = e_2 x_2 = 0$. També: $s_1 = s_2 = y_3 = 0$, per tant, $s_1 y_1 = s_2 y_2 = s_3 y_3 = 0$. ■

És interessant notar en l'exemple anterior que al convertir les desigualtats $\leq$ del problema primal a $\geq$ del dual, les variables de folgança es converteixen en variables d'excés. Això fa que, en aquest cas, el problema dual sigui més difícil de resoldre, perquè les variables d'excés donen lloc a una solució no factible, i hem d'afegir variables artificials. Alguns cops pot passar el contrari: Que el dual sigui més fàcil de resoldre que el primal, com mostre el següent exemple:

Exemple 4.3.2 El dual pot ser més fàcil que el primal

Suposem el problema primal:

$$\begin{array}{rl} \max & z = -2x_1 - x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 \geq 5 \\ & x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

Aplicant el mètode símplex:

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	a_1	a_2	b
2	0	1	0	0	M	M	0
1	1	-1	-1	0	1	0	5
1	-2	4	0	-1	0	1	8
$2-2M$	M	$1-3M$	M	M	0	0	$-13M$
$\boxed{1}$	1	-1	-1	0	1	0	5
1	-2	4	0	-1	0	1	8
0	$-2+3M$	$3-5M$	$2-M$	M	$-2+2M$	0	$-10-3M$
1	1	-1	-1	0	1	0	5
0	-3	5	$\boxed{1}$	-1	-1	1	3
0	4	-7	0	2	M	$-2+M$	-16
1	-2	4	0	-1	0	1	8
0	-3	$\boxed{5}$	1	-1	-1	1	3
0	$-1/5$	0	$7/5$	$3/5$			$-59/5$
1	$\boxed{2/5}$	0	$-4/5$	$-1/5$			$28/5$
0	-3	5	1	-1			3
$1/2$	0	0	1	$1/2$			-9
$5/2$	1	0	-2	$-1/2$			14
$15/2$	0	5	-5	$-5/2$			45

D'on llegim la solució: $z = -9, x_1 = 0, x_2 = 14, x_3 = 9$. Observacions: (i) Em triat sempre que hem pogut els pivots igual a 1 per facilitar el càlculs manuals (tot i que no tinguin els coeficients majors en valor absolut en la fila 0). (ii) S'ha deixat d'actualitzar les variables artificials un cop han sortit de la base.

Per deduir la solució del problema dual, ens fixem que el problema de partida no està en la forma "normal" (equació 4.1). Per convertir el problema en la forma normal hem de convertir les desigualtats $\geq$ en $\leq$ en les restriccions. Per aquest motiu, hem de canviar el signe als valors de la solució dual que llegim de la fila 0. Per altra banda, llegint la solució del dual dels coeficients que multipliquen les variables d'excés e_1, e_2, també hem d'introduir un canvi de signe (perquè la base inicial és $-\mathbf{I}$). Per tant, concloem que la solució del dual és: $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Per plantejar el problema dual, primer formulem el primal en la forma "normal", canviant el signe de les restriccions:

$$\begin{array}{rlcl} \max & z = -2x_1 - x_3 & & z = -2x_1 - x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 \geq 5 & \Rightarrow & -x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 \leq -5 \\ & x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 8 & & -x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq -8 \\ & x_i \geq 0 & & x_i \geq \ 0 \end{array}$$

El problema dual és:

$$\begin{array}{rlcrl} \min & w = -5y_1 - 8y_2 & & \min & w = -5y_1 - 8y_2 \\ \text{s.a} & -y_1 - \ \ y_2 \geq -2 & \Rightarrow & \text{s.a} & y_1 + \ \ y_2 \leq 2 \\ & -y_1 + 2y_2 \geq \ 0 & & & y_1 + 2y_2 \leq 0 \\ & y_1 - 4y_2 \geq -1 & & & -y_1 + 4y_2 \leq 1 \end{array}$$

On hem canviat el signe de les restriccions perquè la solució inicial sigui factible. Aplicant el mètode símplex:

y_1	y_2	s_1	s_2	s_3	b
5	8	0	0	0	0
1	1	1	0	0	2
$\boxed{1}$	-2	0	1	0	0
-1	4	0	0	1	1
0	18	0	-5	0	0
0	3	1	-1	0	2
1	-2	0	1	0	0
0	$\boxed{2}$	0	1	1	1
0	0	0	-14	-9	-9
0	0	1	$-5/2$	$-3/2$	$1/2$
1	0	0	2	1	1
0	2	0	1	1	1

D'on llegim la solució: $z = -9, y_1 = 1, y_2 = 1/2$. Per llegir la solució del primal, i com que hem canviat el signe de les restriccions, hem de canviar el signe als valors de la solució primal que llegim de la fila 0. Així doncs, llegim: $x_1 = 0, x_2 = 14, x_3 = 9$, tal com havíem obtingut abans. Podem veure que el dual ha estat bastant més fàcil de resoldre que el primal. ■

4.4 Mètode símplex dual

Suposem que el primal és un problema de maximització (com l'exemple 4.3.1, pàg. 11). Al plantejar el mètode símplex obtenim una taula amb la columna b amb coeficients positius (perquè la solució sigui factible) que anomenarem primal-factible, i la fila 0 amb coeficients negatius, condició que anomenarem dual-no-factible.

Al aplicar el mètode fem operacions amb les files de forma que els coeficients de la columna b siguin sempre positius. Quan tots el coeficients de la fila 0 son positius, deduïm que la taula és òptima (haurem obtingut les condicions primal i dual factibles).

En el mètode símplex dual invertim aquestes condicions: Comencem amb una fila 0 amb tots els coeficients positius (òptima, o dual-factible), però amb la columna b amb els coeficients negatius (primal-no-factible). Ara es tracta de fer operacions amb les files per aconseguir una solució primal-factible, i que mantingui els coeficients de la fila 0 positius, perquè sigui òptima.

Per mantenir la condició dual-factible i aconseguir la condició primal-factible, hem de triar una fila i amb un valor de b_i negatiu, i el pivot j de la fila i que tingui un valor negatiu, i amb el quocient $\hat{c}_j / \hat{a}_{ij}$ més petit amb valor absolut. És a dir:

$$\min_{\substack{j \\ \hat{a}_{ij}<0}} \left| \frac{\hat{c}_j}{\hat{a}_{ij}} \right| \tag{4.10}$$

Després de pivotar en $\hat{a}_{ij}$, multiplicarem la fila i per -1.

Aquest mètode pot ser el més eficient quan al plantejar problema de programació matemàtica en forma estàndard obtenim les condicions primal-no-factible/dual-factible, tal com mostra el següent exemple.

Exemple 4.4.1 Mètode símplex dual
Considerem l'exemple 4.3.2:

$$\begin{array}{rl}
\max & z = -2x_1 - x_3 \\
\text{s.a} & x_1 + \ x_2 - \ x_3 \geq 5 \\
& x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 8 \\
& x_i \geq 0
\end{array}$$

En la forma estàndard:

$$\begin{array}{rl}
\max & z = -2x_1 - x_3 \\
\text{s.a} & -x_1 - \ x_2 + \ x_3 \leq -5 \\
& -x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq -8 \\
& x_i \geq \ 0
\end{array}$$

Aplicant el mètode símplex dual:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
2	0	1	0	0	0
-1	$\boxed{-1}$	1	1	0	-5
-1	2	-4	0	1	-8
2	0	1	0	0	0
1	1	-1	-1	0	5
-3	0	$\boxed{-2}$	2	1	-18
$1/2$	0	0	1	$1/2$	-9
$5/2$	1	0	-2	$-1/2$	14
$-3/2$	0	1	-1	$-1/2$	9

D'on llegim la solució: $z = -9, x_1 = 0, x_2 = 14, x_3 = 9$. ■

Capítol 5

Variables acotades i descomposició de Dantzig-Wolfe

5.1 Variables acotades

Es tracta d'un problema de programació matemàtica on hi ha variables amb restriccions del tipus $0 \leq x_i \leq u_i$. Aquest problema el podem resoldre amb el mètode símplex. Ara, però, les variables no bàsiques poden ser iguals a zero o a la seva cota superior. Això ho podem deduir fent el canvi $x_i + x_i' = u_i$ (substitució per la cota superior, *upper bound substitution*). Amb aquest canvi, o bé $x_i = 0, x_i' = u_i$, o $x_i = u_i, x_i' = 0$.

Suposem que el problema és de maximització. Els canvis que hem de fer al mètode símplex convencional (veure la secció 2.1) son els següents: Primer, igual que el mètode símplex convencional, triarem entrar com a variable bàsica la variable no bàsica x_j que té el coeficient de la fila 0 més negatiu (produeix l'increment major en la funció objectiu). El valor amb que podem augmentar x_j per millorar la funció objectiu, té les següents limitacions:

1. x_j no pot excedir la seva cota superior, u_j: $x_j \leq u_j$.

2. x_j pot augmentar mentre les altres variables bàsiques x_i compleixin $x_i \geq 0$, perquè la solució sigui factible (igual que en el mètode símplex convencional). Això porta a triar com a pivot en la columna j, el de la fila i que té el menor quocient (veure la secció 2.1):

$$\min_{\substack{i \\ \hat{a}_{ij}>0}} \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}} \tag{5.1}$$

3. x_j pot augmentar mentre les altres variables bàsiques x_i compleixin $x_i \leq u_i$. Com que en la fila i tindrem l'equació $x_i + \hat{a}_{ij} x_j = \hat{b}_i$, deduïm que: (i) $x_i = \hat{b}_i - \hat{a}_{ij} x_j$ on $x_i, x_j, \hat{b}_i \geq 0$, $\hat{b}_i \leq u_i$, per tant, perquè pugui ser $x_i > u_i$ haurà de ser $\hat{a}_{ij} < 0$. D'aquí deduïm que basta vigilar els coeficients de la columna j on $\hat{a}_{ij} < 0$. (ii) Com que $\hat{a}_{ij} < 0$, $(-\hat{a}_{ij}) > 0$, i perquè sigui $x_i \leq u_i$, haurà de ser: $x_i = \hat{b}_i + (-\hat{a}_{ij}) x_j \leq u_i$, d'on $x_j \leq \frac{u_i - \hat{b}_i}{-\hat{a}_{ij}}$, $\hat{a}_{ij} < 0$. Això porta a triar com a pivot en la columna j, el de la fila i que té el quocient menor:

$$\min_{\substack{i \\ \hat{a}_{ij}<0}} \frac{u_i - \hat{b}_i}{-\hat{a}_{ij}} \tag{5.2}$$

Haurem de calcular les tres limitacions anteriors, segons quina sigui la menor, canviarem la taula símplex de la següent manera:

1. Si la limitació més restrictiva és la 1: Farem el canvi de x_j per la seva cota superior: $x_j = u_j - x'_j$.

2. Si la limitació més restrictiva és la 2: Triarem com a pivot el de la la columna j, fila i que té el quocient (5.1) menor (igual que en el mètode símplex convencional).

3. Si la limitació més restrictiva és la 3:
   (a) Farem el canvi de x_i que té el quocient (5.2) menor per la seva cota superior: $x_i = u_i - x'_i$.
   (b) Pivotarem en la columna j, fila i.

Observacions

- Les columnes on haguem fet el el canvi de x_i per la seva cota superior, les marcarem amb un $+$, per recordar el canvi. Quan llegim el valor de les variables bàsiques de les columnes que hem marcat amb $+$, no hem d'oblidar que llegirem: $x'_i = \hat{b}_i$. Per tant $x_i = u_i - x'_i = u_i - \hat{b}_i$.

- També és possible resoldre el problema amb el mètode símplex convencional afegint $x_i \leq u_i$ a la llista de restriccions per a cada variable acotada $0 \leq x_i \leq u_i$.

Exemple 5.1.1 Variables acotades

$$\begin{array}{ll}
\max & z = 6x_3 \\
\text{s.a} & x_1 \quad - \; x_3 = 6 \\
 & \qquad x_2 + 2x_3 = 8 \\
 & x_i \geq 0,\ x_1 \leq 8,\ x_2 \leq 10,\ x_3 \leq 5
\end{array}$$

La taula símplex és:

x_1	x_2	x_3	b
0	0	−6	0
1	0	−1	6
0	1	2	8

Decidim entrar en la base x_3 (columna 3). Les limitacions son:

1. Cota superior: $x_3 \leq 5$.

2. Cota inferior de les variables bàsiques: $\min_{\substack{i \\ \hat{a}_{ij}>0}} \{\hat{b}_i / \hat{a}_{ij}\} \Rightarrow x_3 \leq \hat{b}_2 / \hat{a}_{23} = 8/2 = 4$.

3. Cota superior de les variables bàsiques: $\min_{\substack{i \\ \hat{a}_{ij}<0}} \{\frac{u_i - \hat{b}_i}{-\hat{a}_{ij}}\} \Rightarrow x_3 \leq \frac{u_1 - \hat{b}_1}{-\hat{a}_{13}} = \frac{8-6}{1} = 2$.

La restricció més forta és la 3. Per tant, fem el canvi de x_1 per la seva cota superior, canviem de signe la fila 1, i pivotem en la fila 1:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & + & & & \\
 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\
\hline
 & 0 & 0 & -6 & 0 \\
x_1 = 8 - x'_1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\
 & 0 & 1 & 2 & 8 \\
\hline
 & 0 & 0 & -6 & 0 \\
 & 1 & 0 & \boxed{1} & 2 \\
 & 0 & 1 & 2 & 8 \\
\hline
6 & 6 & 0 & 0 & 12 \\
 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
-2 & -2 & 1 & 0 & 4
\end{array}$$

D'on llegim la solució: $z = 12$, $x'_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 8$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$. ■

5.2 Descomposició de Dantzig-Wolfe

És un mètode eficaç quan la matriu de restriccions es pot descomposar en blocs. Per claredat, considerem el cas en que es pot fer la següent partició en 2 blocs (la generalització a més blocs és immediata):

$$\begin{array}{ll}
\max & z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} \\
\text{s.a} & \mathbf{A}\boldsymbol{u} \leq \mathbf{b} \\
 & \boldsymbol{u} \geq 0
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ll}
\max & z = \mathbf{c}_x^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} + \mathbf{c}_y^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \\
\text{s.a} & \begin{bmatrix} \mathbf{L}_x & \mathbf{L}_y \\ \mathbf{A}_x & \\ & \mathbf{A}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_x \\ \mathbf{b}_y \end{bmatrix} \\
 & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \geq 0
\end{array}$$

les equacions:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_x & \mathbf{L}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} \leq \mathbf{b}_0 \tag{5.3}$$

s'anomenen restriccions de lligadura (*linking constraints*).

Suposem també que els polítops: $\mathcal{P}_x = \{\boldsymbol{x} \,|\, \mathbf{A}_x \boldsymbol{x} \leq \mathbf{b}_x\, \boldsymbol{x} \geq 0\}$ i $\mathcal{P}_y = \{\boldsymbol{y} \,|\, \mathbf{A}_y \boldsymbol{y} \leq \mathbf{b}_y\, \boldsymbol{y} \geq 0\}$ son dos políedres amb punts extrems $\hat{\boldsymbol{x}}_i, i = 1, \cdots N_x$ i $\hat{\boldsymbol{y}}_i, i = 1, \cdots N_y$. Aleshores qualsevol punt $\boldsymbol{x} \in \mathcal{P}_x$, i $\boldsymbol{y} \in \mathcal{P}_y$ admet respectivament la descomposició convexa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \sum_{i=1}^{N_x} \alpha_{x_i} \hat{\boldsymbol{x}}_i, \quad \sum_{i=1}^{N_x} \alpha_{x_i} = 1 \\ \boldsymbol{y} &= \sum_{i=1}^{N_y} \alpha_{y_i} \hat{\boldsymbol{y}}_i, \quad \sum_{i=1}^{N_y} \alpha_{y_i} = 1 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Suposem ara que els punts extrems $\hat{\boldsymbol{x}}_i, i = 1, \cdots N_x$ i $\hat{\boldsymbol{y}}_i, i = 1, \cdots N_y$ son coneguts (com veurem més endavant, només caldrà calcular alguns d'ells, que condueixin a la solució òptima). Podem plantejar el problema màster (*master problem*) en funció de les variables desconegudes α_{x_i} i α_{y_i}:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \mathbf{c}_M^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{A}_M \boldsymbol{\alpha} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.5}$$

on $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \alpha_{x_1} & \alpha_{x_2} & \cdots & \alpha_{y_1} & \alpha_{y_2} & \cdots \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{s}$ és un vector amb variables de folgança (tantes com restriccions de lligadura, veure l'equació (5.3)), i:

$$\mathbf{c}_M^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_x^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{x}}_1 & \mathbf{c}_x^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{x}}_2 & \cdots & \mathbf{c}_y^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{y}}_1 & \mathbf{c}_y^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{y}}_2 & \cdots \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

$$\mathbf{A}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_x \hat{\boldsymbol{x}}_1 & \mathbf{L}_x \hat{\boldsymbol{x}}_2 & \cdots & \mathbf{L}_y \hat{\boldsymbol{y}}_1 & \mathbf{L}_y \hat{\boldsymbol{y}}_2 & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Ara aplicarem el mètode símplex revisat (veure la secció 3.3, pàg. 7) al problema (5.5). Primer hem de calcular els costos reduïts (3.6): $r_i = \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_i$. De (5.6) i (5.7) tenim que els coeficients del vector $\mathbf{c}_N^{\mathrm{T}}$ i les columnes $\mathbf{a}_i$ associats a una variable α_{x_i} $(c_{x_i}, \mathbf{a}_{x_i})$ i α_{y_i} $(c_{y_i}, \mathbf{a}_{y_i})$ son respectivament:

$$c_{x_i} = \mathbf{c}_x^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{x}}_i \qquad c_{y_i} = \mathbf{c}_y^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{y}}_i \tag{5.8}$$

$$\mathbf{a}_{x_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_x \hat{\boldsymbol{x}}_i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_{y_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_y \hat{\boldsymbol{y}}_i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Substituint (5.8) i (5.9) el l'equació de costos reduïts, i definint:

$$\boldsymbol{\lambda}_B^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_0^{\mathrm{T}} & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

el cost reduït associat a una variable α_{x_i} (r_{x_i}) i α_{y_i} (r_{y_i}) serà respectivament:

$$\begin{aligned} r_{x_i} &= \mathbf{c}_x^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{x}}_i - \boldsymbol{\lambda}_0^{\mathrm{T}} \mathbf{L}_x \hat{\boldsymbol{x}}_i - \lambda_x \\ r_{y_i} &= \mathbf{c}_y^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{x}}_i - \boldsymbol{\lambda}_0^{\mathrm{T}} \mathbf{L}_y \hat{\boldsymbol{y}}_i - \lambda_y \end{aligned} \tag{5.11}$$

Per aplicar el criteri d'optimalitat, necessitem saber si tots els costos reduïts (5.11) son negatius. No cal, però calcular-los tots: Si el major d'ells és negatiu, ho seran tots. Així doncs, per saber si una solució bàsica és òptima, hem de calcular:

$$\max_{\substack{i=1,\cdots N_x \\ j=1,\cdots N_y}} \{r_{x_i}, r_{y_j}\} \tag{5.12}$$

Per resoldre (5.12) necessitem conèixer el extrems dels políedres $\mathcal{P}_x$ i $\mathcal{P}_y$ (els vectors $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ i $\hat{\boldsymbol{y}}_i$). No cal, però, coneixer-los tots, basta calcular els extrems que maximitzen les funcions objectiu donades per (5.11). És a dir, hem de resoldre els subproblemes:

$$\begin{aligned} \max\ & (\mathbf{c}_x^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\lambda}_0^{\mathrm{T}} \mathbf{L}_x) \hat{\boldsymbol{x}} - \lambda_x \qquad & \max\ & (\mathbf{c}_y^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\lambda}_0^{\mathrm{T}} \mathbf{L}_y) \hat{\boldsymbol{y}} - \lambda_y \\ \text{s.a}\ & \mathbf{A}_x \hat{\boldsymbol{x}} \leq \mathbf{b}_x & \text{s.a}\ & \mathbf{A}_y \hat{\boldsymbol{y}} \leq \mathbf{b}_y \\ & \hat{\boldsymbol{x}} \geq 0 & & \hat{\boldsymbol{y}} \geq 0 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Per tant, si els resultats dels subproblemes (5.13) son ≤ 0, aleshores la solució és òptima. Altrament, l'extrem que dóna el valor més positiu entra en la base.

Per aplicar l'algorisme de Dantzig-Wolfe seguirem els mateixos passos que en el mètode símplex revisat (secció 3.3, pàg. 7) aplicats al problema màster (5.5), només que en el càlcul dels costos reduïts haurem de resoldre primer els subproblemes (5.13).

Observacions

- Si el problema màster és de minimització, els subproblemes (5.13) també ho seran, i la solució serà òptima si els resultats dels subproblemes son ≥ 0.
- Per a la primera iteració de l'algorisme, si $\mathbf{b}_x \geq 0$ i $\mathbf{b}_y \geq 0$, podem agafar $\hat{\boldsymbol{x}}_1 = \mathbf{0}$, $\hat{\boldsymbol{y}}_1 = \mathbf{0}$ (que son extrems dels políedres $\mathcal{P}_x$ i $\mathcal{P}_y$), amb $\alpha_{x_1} = \alpha_{y_1} = 1$. Les variables bàsiques inicials del problema màster seran: $\text{VB} = \{\mathbf{s}, \alpha_{x_1}, \alpha_{y_1}\}$. Deduïm doncs, que si hi ha n blocs i m restriccions de lligaruda, hi haurà $n+m$ variables bàsiques. És a dir, la solució òptima serà la combinació lineal de, com a molt, $n+m$ punts extrems dels políedres $\mathcal{P}_x$ i $\mathcal{P}_y$.

Exemple 5.2.1 Dantzig-Wolfe

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 - x_2 + y_1 - y_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 3x_2 - y_1 - 2y_2 \leq 10 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & y_1 - 3y_2 \leq 7 \\ & 2y_1 + y_2 \leq 8 \\ & x_i, y_i \geq 0 \end{aligned}$$

Del problema tenim que:

$$\mathbf{c}_x = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L}_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}_y = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Iteració 1

Comencem amb $\hat{\boldsymbol{x}}_1 = \hat{\boldsymbol{y}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_{x_1} = \alpha_{y_1} = 1$.

Les variables bàsiques son: $\mathrm{VB} = \{s_1,\ \alpha_{x_1},\ \alpha_{y_1}\}$, d'on: $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \mathbf{I}$, $\boldsymbol{\lambda}_B^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i les funcions objectiu dels subproblemes (5.13):

$$\min\ (\mathbf{c}_x^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\lambda}_0^{\mathrm{T}} \mathbf{L}_x)\hat{\boldsymbol{x}} - \lambda_x = \mathbf{c}_x^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{x}}$$
$$\min\ (\mathbf{c}_y^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\lambda}_0^{\mathrm{T}} \mathbf{L}_y)\hat{\boldsymbol{y}} - \lambda_y = \mathbf{c}_y^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{y}}$$

Que tenen com a solució:

x_1	x_2	s_1	s_1	b	y_1	y_2	s_1	s_1	b
-2	1	0	0	0	-1	1	0	0	0
1	$\boxed{2}$	1	0	3	1	-3	1	0	7
1	-1	0	1	1	2	$\boxed{1}$	0	1	8
$-3/2$	0	$-1/2$	0	$-3/2$	-3	0	0	-1	-8
$1/2$	1	$1/2$	0	$3/2$	7	0	1	3	31
$3/2$	0	$1/2$	1	$5/2$	2	1	0	1	8

$$z_{x_2} = -3/2 \quad \hat{\boldsymbol{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \end{bmatrix}, \quad z_{y_2} = -8 \quad \hat{\boldsymbol{y}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Per tant, $\hat{\boldsymbol{y}}_2$ entra en la base.

Iteració 2

$\mathbf{a}_{y_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_y \hat{\boldsymbol{y}}_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 0 \\ \boxed{1} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, d'on deduïm que α_{y_1} surt de la base, per tant: $\mathrm{VB} = \{s_1,\ \alpha_{x_1},\ \alpha_{y_2}\}$, $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{c}_y \hat{\boldsymbol{y}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\lambda}_B^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ i les funcions objectiu dels subproblemes (5.13):

$$\min\ (\mathbf{c}_x^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\lambda}_0^{\mathrm{T}} \mathbf{L}_x)\hat{\boldsymbol{x}} - \lambda_x = \mathbf{c}_x^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{x}}$$
$$\min\ (\mathbf{c}_y^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\lambda}_0^{\mathrm{T}} \mathbf{L}_y)\hat{\boldsymbol{y}} - \lambda_y = \mathbf{c}_y^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{y}} + 8$$

Que deduïm tindran com a solució els mateixos vectors que en la iteració 1 amb funció objectiu: $z_{x_2} = -3/2$, $z_{y_2} = 0$. Per tant, $\hat{\boldsymbol{x}}_2$ entra en la base.

Iteració 3

$\mathbf{a}_{x_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_x \hat{\boldsymbol{x}}_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/2 \\ \boxed{1} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 26 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, d'on deduïm que α_{x_1} surt de la base, per tant: $\mathrm{VB} = \{s_1,\ \alpha_{x_2},\ \alpha_{y_2}\}$, $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{c}_x \hat{\boldsymbol{x}}_2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3/2 & -8 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -9/2 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\lambda}_B^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -3/2 & -8 \end{bmatrix}$ i les funcions objectiu dels subproblemes (5.13):

$$\min\ (\mathbf{c}_x^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\lambda}_0^{\mathrm{T}} \mathbf{L}_x)\hat{\boldsymbol{x}} - \lambda_x = \mathbf{c}_x^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{x}} + 3/2$$
$$\min\ (\mathbf{c}_y^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\lambda}_0^{\mathrm{T}} \mathbf{L}_y)\hat{\boldsymbol{y}} - \lambda_y = \mathbf{c}_y^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{y}} + 8$$

Que deduïm tindran com a solució els mateixos vectors que en la iteració 1 amb funció objectiu: $z_{x_2} = 0$, $z_{y_2} = 0$. Per tant, la solució és òptima, i val: $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 43/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, és a dir: $s_1 = 43/2$, $\alpha_{x_2} = 1$, $\alpha_{y_2} = 1$, d'on obtenim finalment: $x_1 = 0$, $x_2 = 3/2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 8$, $z = -3/2 - 8 = -19/2$. ■

Capítol 6

Sensibilitat

Aquí analitzem com afecta el canvi d'algun dels coeficients del problema de programació matemàtica a la seva solució.

Abans recordem alguns resultats (veure la secció 1.3, pàg. 3). La solució del problema de programació matemàtica la podem escriure com:

$$z = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}) \boldsymbol{x}_N \tag{6.1}$$

on definim els costos reduïts:

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \tag{6.2}$$

que donen el criteri d'optimalitat:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &\leq 0 \quad \text{per un problema de maximització,} \\ \boldsymbol{r} &\geq 0 \quad \text{per un problema de minimització.} \end{aligned} \tag{6.3}$$

El valor que assoleix la funció objectiu al substituir la solució factible bàsica és:

$$z_0 = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \tag{6.4}$$

amb valor per les variables bàsiques:

$$\boldsymbol{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \tag{6.5}$$

Canvi del coeficient d'una variable no bàsica en la funció objectiu Al canviar el vector $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$: (i) De (6.4) deduïm que canviarà el valor òptim que assoleix la funció objectiu (z_0). (ii) De (6.2) deduïm que canviaran els costos reduïts, i per tant, el conjunt de variables òptimes pot canviar si es viola el criteri d'optimalitat.

Canvi del coeficient d'una variable bàsica en la funció objectiu Al canviar el vector $\mathbf{c}_n^{\mathrm{T}}$: (i) De (6.4) deduïm que el valor òptim que assoleix la funció objectiu (z_0) no canvia, sempre que no el conjunt de variables bàsiques no canviï. (ii) De (6.2) deduïm que canviaran els costos reduïts, i per tant, el conjunt de variables òptimes pot canviar si es viola el criteri d'optimalitat.

Canvi del terme independent en una restricció Si canviem el vector **b**: (i) De (6.4) deduïm que canviarà el valor òptim que assoleix la funció objectiu (z_0). (ii) De (6.5) deduïm que canviaran els valors de les variables bàsiques, per tant, la solució pot deixar de ser factible.

Canvi de la columna de restriccions d'una variable no bàsica Si canviem la matriu **B**: (i) De (6.4) deduïm que canviarà el valor òptim que assoleix la funció objectiu (z_0). (ii) De (6.2) deduïm que canviaran els costos reduïts, i per tant, el conjunt de variables òptimes pot canviar si es viola el criteri d'optimalitat. (iii) De (6.5) deduïm que canviaran els valors de les variables bàsiques, per tant, la solució pot deixar de ser factible.

Addició de noves variables Podem afegir la nova variable a la llista de variables no bàsiques i calcular el seu cost reduït (equació (6.2)). Si no es viola el criteri d'optimalitat, el conjunts de variables bàsiques i la solució no canvia (equacions (6.4) i (6.5)).

Addició de noves restriccions Es pot donar un dels següents casos:

1. La solució òptima actual compleix la nova restricció.
2. La solució òptima actual no compleix la nova restricció, però hi ha una solució òptima factible.
3. No hi ha solució òptima factible.

Si es dóna el cas 1, la solució no canvia. Això ho podem deduir perquè la nova restricció reduirà el nombre de punts de la regió factible. Si la restricció es compleix, vol dir que l'extrem que dóna la solució òptima no canvia.

Si es dóna el cas 2, podem fer servir el mètode símplex dual (veure la secció 4.4, pàg. 13). El cas 3 el podem detectar si al aplicar el mètode símplex dual arribem a un punt on la solució no és primal factible (hi ha un $\hat{b}_i < 0$), i en la fila i no hi ha cap $\hat{a}_{ij} < 0$.

Programació lineal paramètrica Consisteix en posar algun (o alguns) coeficient del problema en funció d'un paràmetre i analitzar les possibles solucions al variar el paràmetre. Per exemple: $c_1(\lambda) = c_1(1+\lambda)$. Per fer l'anàlisi posarem $\lambda = 0$, resoldrem el problema i investigarem què val la funció objectiu en funció del paràmetre, i en quin rang de valors on es compleix el criteri d'optimalitat. En els valor on es deixi de complir aquest criteri, haurem de resoldre el problema per el nou conjunt de variables bàsiques i repetir l'anàlisi.

Exemple 6.0.2 Programació lineal paramètrica – I Resoldre el següent problema de programació lineal per $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{s. a} \quad & x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \leq \lambda_1 \\ & 4x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 \leq \lambda_2 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

La taula símplex és:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
-5	-3	-2	0	0	0
$\boxed{1}$	2	1	1	0	λ_1
4	1	2	0	1	λ_2

D'on deduïm que entra x_1 en la base i surt s_1 si $\lambda_1 \leq \lambda_2/4$. Pivotant en el coeficient emmarcat en la taula anterior obtenim:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
5	0	7	3	5	0	$5\lambda_1$
	1	2	1	1	0	λ_1
-4	0	$\boxed{-7}$	-2	-4	1	$\lambda_2 - 4\lambda_1$

Podem veure que la taula és òptima i factible per $\lambda_1 \leq \lambda_2/4$. Si $\lambda_1 > \lambda_2/4$ la taula anterior no és factible. Podem aplicar el mètode símplex dual pivotant en l'element emmarcat en la taula anterior (x_2 entra en la base i s_2 surt), i obtenim:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
1	0	0	1	1	1	$\lambda_1 + \lambda_2$
$2/7$	1	0	$3/7$	$\boxed{-1/7}$	$2/7$	$-1/7\lambda_1 + 2/7\lambda_2$
$-1/7$	0	1	$2/7$	$4/7$	$-1/7$	$4/7\lambda_1 - 1/7\lambda_2$

Podem veure que la taula és òptima i factible per $\lambda_1 \leq 2\lambda_2$. Si $\lambda_1 > 2\lambda_2$ la taula anterior no és factible. Podem aplicar el mètode símplex dual pivotant en l'element emmarcat en la taula anterior (s_1 entra en la base i x_1 surt), i obtenim:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
7	7	0	4	0	3	$3\lambda_2$
-7	-7	0	-3	1	-2	$\lambda_1 - 2\lambda_2$
4	4	1	$15/7$	0	1	λ_2

Agrupant els resultats tenim la taula:

$\lambda_1,\ \lambda_2$	x_1	x_2	x_3	z
$0 \le \lambda_1 < \lambda_2/4$	λ_1	0	0	$5\lambda_1$
$\lambda_2/4 \le \lambda_1 \le 2\lambda_2$	$-\lambda_1/7+2\lambda_2/7$	$4\lambda_1/7-\lambda_2/7$	0	$\lambda_1+\lambda_2$
$2\lambda_2 \le \lambda_1$	0	λ_2	0	$3\lambda_2$

■

Exemple 6.0.3 Programació lineal paramètrica – II
Resoldre el següent problema de programació lineal per $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} \min & z = (2+\lambda)x_1 + (3-\lambda)x_2 + (1+\lambda)x_3 \\ \text{s. a} & x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ & x_1 + 4x_2 + 7x_3 \le 9 \\ & \qquad\qquad x_i \ge 0 \end{array}$$

Per inspecció podem veure que si $c_1,\ c_2,\ c_3 \ge 0$, aleshores cap x_i entra en la base, i la solució és $z = 0$, $x_1,\ x_2,\ x_3 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = (2+\lambda) \ge 0 \\ c_2 = (3-\lambda) \ge 0 \\ c_3 = (1+\lambda) \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda \ge -2 \\ \lambda \le 3 \\ \lambda \ge -1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 \le \lambda \le 3$$

Si $\lambda < -1$, aleshores x_3 entra en la base. La taula símplex serà:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	0	0	0
	1	1	1	1	0	3
	1	4	$\boxed{7}$	0	1	9
$c_3/7$	$c_3/7-c_1$	$4c_3/7-c_2$	0	0	$c_3/7$	$9/7c_3$
$-1/7$	$6/7$	$3/7$	0	1	$-1/7$	$12/7$
$1/7$	$1/7$	$4/7$	1	0	$1/7$	$9/7$

D'on llegim la solució $z = 9/7\,c_3, x_1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 9/7$. x_1 entrarà en la base quan: $c_3/7 - c_1 > 0$, és a dir: $\lambda < -13/6$. Continuant la taula anterior:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
	$\boxed{6/7}$	$3/7$	0	1	$-1/7$	$12/7$
$-1/6$	0		1			1

D'on llegim la solució $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$. Substituint en la funció objectiu: $z = 5 + 3\lambda$.

Finalment, si $\lambda > 3$, deduïm que $x_1 = 0,\ x_2 = 9/4,\ x_3 = 0, z = 9/4(3-\lambda)$.

Agrupant els resultats tenim la taula:

λ	x_1	x_2	x_3	z
$\lambda < -13/6$	2	0	1	$5+3\lambda$
$-13/6 \le \lambda \le -1$	0	0	$9/7$	$9/7(1+\lambda)$
$-1 \le \lambda \le 3$	0	0	0	0
$\lambda \ge 3$	0	$9/4$	0	$9/4(3-\lambda)$

■

Capítol 7

Problema del transport

7.1 Formulació

Els ingredients son:

1. m punts de subministrament. El punt i pot subministrat s_i unitats.
2. n punts de demanda. El punt j té una demanda de d_j unitats.
3. $m \times n$ costos c_{ij} per transportat una unitat del punt subministrament i al punt de demanda j.

Es vol calcular les unitats x_{ij} que hi ha que transportar de cada punt de subministrament i a cada punt de demanda j que minimitzen el cost total. És a dir:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s. a} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j \\ & \qquad x_{ij} \ge 0 \end{array} \tag{7.1}$$

La informació del problema es pot donar en forma de taula:

	costos				subministraments, S
origens	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	s_1
	c_{21}	c_{21}	$\cdots$	c_{2n}	s_2
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	c_{m1}	c_{m1}	$\cdots$	c_{mn}	s_m
demandes, D	d_1	d_2	$\cdots$	d_n	
	destinacions				

Si la demanda és igual al subministrament, el problema es diu *balancejat*. Per resoldre el problema és convenient que sigui balancejat. Si no ho és, s'hi pot convertir, tal com es veurà més endavant.

El problema de transport es pot resoldre amb el mètode símplex, com es mostra en el següent exemple. L'objectiu d'aquest exemple és entendre millor el problema de transport, però el mètode símplex no és adequat per a resoldre'l, donat que hi ha mètodes molt més eficients com es mostrarà més endavant.

Exemple 7.1.1 Problema del transport amb el mètode símplex
Suposem el problema de transport donat per la següent taula:

$$\begin{array}{c|c|c|c} & & & S\\ \cline{2-3} & 25 & 20 & 35\\ \cline{2-3} & 10 & 15 & 15\\ \cline{2-3} D & 20 & 30 & \end{array}$$

El problema és:

$$\begin{array}{ll} \min & z = 25x_{11} + 20x_{12} + 10x_{21} + 15x_{22}\\ \text{s.a} & x_{11} + x_{12} = 35\\ & x_{21} + x_{22} = 15\\ & x_{11} + x_{21} = 20\\ & x_{12} + x_{22} = 30\\ & \qquad x_{ij} \geq 0 \end{array}$$

Es pot veure que les restriccions son redundants (la suma de les dues primeres equacions és igual a la suma de les dues últimes), per tant en podem eliminar-ne una (p.e. la darrera). Aplicant el mètode símplex:

$$\begin{array}{ccccccc} x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{22} & a_1 & a_2 & b\\ \hline -25 & -20 & -10 & -15 & -M & -M & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 15\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 20\\ \hline -5+M & 0 & -10+2M & -15+M & 0 & 0 & 700+35M\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 15\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 20\\ \hline -5+M & 0 & 0 & -5-M & 10-2M & 0 & 850+5M\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 15\\ \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 5\\ \hline 0 & 0 & 0 & -10 & 5-M & 5-M & 875\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 30\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 15\\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 5 \end{array}$$

D'on llegim la solució: $z = 875, x_{11} = 5, x_{12} = 30, x_{21} = 15, x_{22} = 0$. ■

De l'exemple anterior podem extreure varies conclusions: (i) Podem eliminar una de les restriccions. (ii) D'aquí que el problema sempre tendrà $m+n-1$ variables bàsiques. (iii) Els coeficients de les variables son 0, 1, -1 (excepte en la fila 0). Per aquest motiu, les operacions elementals que fem amb les files quan introduïm una variable en la base son sembre sumes i restes. D'aquí que, si els elements del vector **b** son enters, la solució serà entera.

Balancejament Per a balancejar un problema de transport afegirem punts de demanda o subministrament artificials (*dummy*) que consumeixen o subministren l'excés/mancança. Els punts de demanda artificials tindran un cost 0, als de subministrament hi afegirem un cost de penalització (*shortage*). Per exemple, si en el problema 7.1.1 la demanda fos superior al subministrament, i afegim un cost de penalització de 20 i 30 per satisfer la demanda del punt 1 i 2 respectivament des del punt de subministrament artificial, aleshores el problema de transport seria:

$$\begin{array}{r|c|c|c} & & & S\\ \cline{2-3} & 25 & 20 & 35\\ \cline{2-3} & 10 & 15 & 15\\ \cline{2-3} \textit{shortage} & 20 & 30 & 10\\ \cline{2-3} D & 25 & 35 & \end{array}$$

7.2 Mètode símplex del problema de transport

Una vegada balancejat, si no hi estava, i igual que el símplex convencional, els passos son:

1. Trobar una solució bàsica factible inicial.
2. Calcular els costos reduïts (coeficients de la fila 0 canviats de signe). Si son ≤ 0 i el problema és de maximització, o ≥ 0 i el problema és de minimització, aleshores la solució és òptima.
3. Agafar el cost reduït major que més afavoreix la funció objectiu (el més positiu si és de max. o més negatiu si és de min.), pivotar, i tornar a 2.

En comptes de plantejar la taula símplex, en un problema de transport és molt més eficient treballar directament amb la matriu de costos, tal com s'explica a continuació.

Solució bàsica factible inicial

Hi ha 3 mètodes:

Mètode del cap de cantó nord-oest *Northwest corner* Es comença amb l'extrem superior esquerra (nord-oest). Es tria $x_{11} = \min\{s_1, d_1\}$ i es canvia s_1 i d_1 per $s_1 - \min\{s_1, d_1\}$ i $d_1 - \min\{s_1, d_1\}$ respectivament. Si $s_1 = 0$ ($d_1 = 0$), aleshores marquem aquesta fila (columna) amb una creu indicant que s'ha esgotat el subministrament (demanda), i per tant, no hi haurà més variables bàsiques en aquesta fila (columna). Si $s_1 = 0$ i $d_1 = 0$ aleshores manquem només la fila o la columna. Es reparteix el procediment amb la casella més nord-oest que no estigui en una fila o columna marcada fins que no quedin més caselles.

Exemple 7.2.1 Mètode del cap de cantó nord-oest Donat el problema de transport de la taula **0.** (no es posen els costos perquè amb aquest mètode no es fan servir), al aplicar el mètode del cap de cantó nord-oest s'obtenen les taules **1.** $\cdots$ **5.**:

0.		costos		S
				35
				15
				10
D	15	25	20	

1.		x_{ij}		S
	15			20
				15
				10
D	x	25	20	

2.		x_{ij}		S
	15	20		x
				15
				10
D	x	5	20	

3.		x_{ij}		S
	15	20		x
		5		10
				10
D	x	x	20	

4.		x_{ij}		S
	15	20		x
		5	10	x
				10
D	x	x	20	

5.		x_{ij}		S
	15	20		x
		5	10	x
			10	x
D	x	x	0	

D'on la solució bàsica inicial és: $x_{11} = 15$, $x_{12} = 20$, $x_{22} = 5, x_{23} = 10, x_{33} = 10$. ■

Mètode del mínim cost Com que el mètode anterior no fa servir els costos, és possible que la solució inicial tingui un cost molt elevat, i possiblement s'hagin de fer moltes iteracions fins arribar a la solució òptima.

Amb el mètode del mínim cost procedim de manera semblant al mètode anterior, però triant sempre la casella de cost mínim que no estigui en una fila/columna marcada.

Exemple 7.2.2 Mètode del mínim cost

L'exemple anterior amb el mètode del mínim cost seria:

0.		costos		S
	25	20	18	35
	10	15	12	15
	20	30	22	10
D	15	25	20	

1.		x_{ij}		S
				35
	15			x
				10
D	0	25	20	

2.		x_{ij}		S
			20	15
	15			x
				10
D	0	25	x	

3.		x_{ij}		S
			20	15
	15			x
	0			10
D	x	25	x	

4.		x_{ij}		S
		15	20	x
	15			x
	0			10
D	x	10	x	

5.		x_{ij}		S
		15	20	x
	15			x
	0	10		x
D	x	0	x	

D'on la solució bàsica inicial és: $x_{12} = 15$, $x_{13} = 20$, $x_{21} = 15, x_{31} = 0, x_{32} = 10$. ■

Mètode de Vogel En el mètode del mínim cost, pot passar que ens trobem forçats a triar costos elevats per poder completar la taula, arribant a solucions inicials llunyanes de la òptima. El mètode de Vogel intenta millorar la elecció introduint una ponderació igual a la diferència entre els dos costos menors de cada fila (columna). A continuació es tria la fila (columna) amb el major coeficient de ponderació, i d'entre els seus elements, el que tingui menor cost. Els costos de les files (columnes) marcades no es tenen en compte en el càlcul dels coeficients de ponderació.

Exemple 7.2.3 Mètode de Vogel

L'exemple anterior amb el mètode de Vogel seria: (en la fila (columna) P hi ha el coeficient de ponderació)

0.		costos		S	P
	25	20	18	35	2
	10	15	12	15	2
	20	30	22	10	2
D	15	25	20		
P	10	5	6		

1.		x_{ij}		S	P
				35	2
	15			x	
				10	2
D	0	25	20		
P	5	10	4		

2.		x_{ij}		S	P
		25		10	7
	15			x	
				10	2
D	0	x	20		
P	5		4		

3.		x_{ij}		S	P
		25	10	x	
	15			x	
				10	2
D	0	x	10		
P	0		0		

4.		x_{ij}		S	P
		25	10	x	
	15			x	
	0			10	0
D	x	x	10		
P			0		

5.		x_{ij}		S	P
		25	10	x	
	15			x	
	0		10	x	
D	x	x	0		
P					

D'on la solució bàsica inicial és: $x_{12} = 25$, $x_{13} = 10$, $x_{21} = 15, x_{31} = 0, x_{33} = 10$.

Observació: En comptes de reescriure la taula en cada iteració, es pot fer un càlcul més compacte afegint una nova columna (fila) amb les noves ponderacions i subministraments (demandes) que resulten després d'introduir cada variable bàsica, com es mostra a continuació:

			x_{ij}		0.		1.		2.		3.		4.		5.	
					S	P	S	P	S	P	S	P	S	P	S	P
			$25^{2.}$	$10^{3.}$	35	2	35	2	10	7	x		x			
		$15^{1.}$			15	2	x									
		$0^{4.}$		$10^{5.}$	10	2	10	2	10	2	10	2	10	0	x	
0.	D	15	25	20												
	P	10	5	6												
1.	D	0	25	20												
	P	5	10	4												
2.	D	0	x	20												
	P	5		4												
3.	D	0		10												
	P	0		0												
4.	D	x		10												
	P			0												
5.	D			0												
	P															

■

Costos reduïts, *pricing-out*

Del que s'ha explicat en la secció 3.3, pàg. 7, tenim que els costos reduïts associats a la variable x_{ij} son:

$$r_{ij} = c_{ij} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_{ij}$$

Com que hi ha $m+n-1$ variables bàsiques, podem escriure:

$$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 & \cdots & u_m & v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

on u_i son els elements que corresponen a les $m-1$ restriccions de subministrament (de les que hem eliminat la primera), i v_j son els elements que corresponen a les n restriccions de demanda. Per a trobar els valors de u_i i v_j, fem servir la condició de que per les variables bàsiques ha de ser: $r_{ij} = 0$ (recordar que al pivotar en x_{ij} introduïm zeros en la resta de la columna). Per tant, per a les variables bàsiques:

$$c_{ij} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_{ij} = 0$$

Al resoldre l'equació anterior pel problema de transport, s'obté el sistema d'equacions:

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad ij \in \{\text{conjunt de variables bàsiques}\}$$

on podem fixar arbitràriament una de les variables, per exemple, $u_1 = 0$.

Un cop hem resolt el valor de u_i i v_j, podem calcular els costos reduïts de les variables no bàsiques com:

$$r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

Exemple 7.2.4 Costos reduïts (*pricing-out*)
Per l'exemple 7.2.3 tenim la matriu de costos, i solució bàsica inicial:

0.	costos			S
	25	20	18	35
	10	15	12	15
	20	30	22	10
D	15	25	20	

5.	x_{ij}			u
	[9]	25	10	0
	15	[1]	[0]	-6
	0	[6]	10	4
v	16	20	18	

On s'ha calculat: $u_1 = 0$, $v_2 = c_{12} - u_1 = 20$, $v_3 = c_{13} - u_1 = 18$, $u_3 = c_{33} - v_3 = 18$, $v_1 = c_{31} - u_3 = 16$, $u_2 = c_{21} - v_1 = -6$.

A continuació calculem els costos reduïts de les variables no bàsiques (valors entre gafets en la figura): $r_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 9$, $r_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 1$, $r_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 0$, $r_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 6$.

Podem veure que la solució obtinguda és òptima, perquè el problema és de minimització i tots el coeficients son ≥ 0. Altrament, agafaríem el coeficient més negatiu i introduiríem la variable en la base. Donat que $r_{23} = 0$, la solució òptima no és única: Podríem entrar l'element x_{23} en la base i la solució també seria òptima. Això és perquè al ser $r_{23} = 0$, al pivotar en la posició x_{23}, la fila 0, i per tant el cost resultant, no canviarà. ■

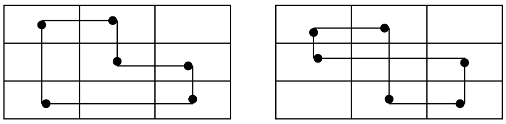
Pivotació

Per a pivotar en un element d'un problema de transport, és convenient introduir el concepte de bucle (*loop*).

Definim un bucle com una seqüència ordenada de caselles tals que:

1. Qualsevol parell de caselles consecutives del bucle està en la mateixa fila o columna.
2. No hi ha 3 o més caselles consecutives en la mateixa fila o columna.
3. La darrera casella de la seqüència està en la mateixa fila o columna que la primera.

La següent figura mostra dos possible bucles:



Per pivotar en el problema del transport procedirem de la següent manera:

1. Formar un bucle començant amb la casella que correspon a la variable que desitgem que entri en la base, i agafant caselles on hi hagi variables bàsiques. Es pot demostrar que aquest bucle sempre existeix i és únic.
2. Marquem la casella que entra en la base amb un $+$ i a partir d'aquesta, marquem les caselles del bucle alternativament amb $-$ i $+$.
3. Agafem la casella marcada amb $-$ que tingui el coeficient x_{ij} menor i al restem a les caselles marcades amb $-$ i al sumem a les caselles marcades amb $+$. La casella de menor valor surt de la base i la casella inicial entra en la base.

Exemple 7.2.5 Pivotació
Suposem que volem optimitzar el problema de l'exemple 7.2.2 del mètode del mínim cost, a partir de la solució bàsica obtinguda (en l'exemple 7.2.4 hem vist que el mètode de Vogel dóna directament la solució òptima). Primer hem de buscar els costos reduïts (coeficients de la fila zero de les variables no bàsiques canviats de signe), r_{ij}. Per això calculem els valors de u_i i v_j i després $r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ (valors entre gafets en la figura). Podem veure que hi ha valors de r_{ij} negatius, per tant, agafem el més negatiu i com que n'hi ha dos

d'iguals, el que té el cost major (valor encerclat, r_{23}). Per entrar r_{23} en la base, busquem el bucle i marquem els coeficients alternativament amb $+/-$. Busquem el coeficient menor dels que hem marcat amb $-$ (és el $x_{32} = 10$). Actualitzem els coeficients de les variables bàsiques del bucle amb aquest valor, i s'obté la taula de la iteració 2. En aquesta taula calculem novament r_{ij} i podem comprovar que la taula és òptima, perquè tots els valors obtinguts son ≤ 0. Si ho comparem amb la solució del mateix problema obtinguda en l'exemple 7.2.4, podem comprovar que és diferent. El motiu és que la solució no és única, tal com ja s'havia comentat en l'exemple 7.2.4. Efectivament, si calculem el cost z de les solucions òptimes obtingudes, podem comprovar que és 1050 en ambdós casos. També podem comprovar que en la solució obtinguda ara tenim $r_{33} = 0$, que indica que la solució òptima no és única. Si entrem en la base r_{33}, obtindríem la mateixa solució que en l'exemple 7.2.4.

0.	costos			S
	25	20	18	35
	10	15	12	15
	20	30	22	10
D	15	25	20	

1.	x_{ij}, $[r_{ij}]$			u
	[15]	15+	20-	0
	15-	[-5]	$\bigcirc$[-6]+	0
	0+	10-	[-6]	10
v	10	20	18	

2.	x_{ij}, $[r_{ij}]$			u
	[9]	25	10	0
	5	[1]	10	-6
	10	[6]	[0]	4
v	16	20	18	

■

7.3 Problema de transport amb transbords

Ara permetem que hi hagi punts de transbordament. Aquests punts, a més de poder ser punts de subministrament i demanda, poden rebre i enviar (fer transbord). Per a solucionar aquest tipus de problema procedirem igual que abans, però afegint una fila i columna per a cada punt de transbord (si no en teníem) i sumant el subministrament total al subministrament i demanda del punt de transbord.

Exemple 7.3.1 Problema de transport amb transbords
Suposem que tenim un punt de producció *Pr* on es produeixen 200 unitats de producte que es consumeix en dos punts de demanda *A* i *B* amb demandes de 50 i 70 respectivament. Els punts *A* i *B* son també punts de transbord. A més, disposem d'un punt *T* de només transbord. Els cost per portar una unitat de producte entre aquest punts és:

		destinacions		
		A	*B*	*T*
origens	*Pr*	20	30	5
	A	0	10	8
	B	8	0	7
	T	6	6	0
		costos		

Com que el subministrament és major que la demanda (en 80 unitats), hem d'afegir un punt de demanda artificial *Du*. El subministrament total és de 200, que haurem d'afegir als subministraments i demandes dels punts de transbord. El problema de transport que hem de resoldre és doncs:

		destinacions				
		A	*B*	*T*	*Du*	*S*
origens	*Pr*	20	30	5	0	200
	A	0	10	8	0	200
	B	8	0	7	0	200
	T	6	6	0	0	200
	D	250	270	200	80	

Aplicant el mètode de Vogel tenim la següent solució bàsica inicial. Calculant els costos reduïts de les variables no bàsiques (entre gafets en la figura) podem comprovar que és òptima:

		destinacions				
		A	*B*	*T*	*Du*	*u*
origens	*Pr*	[9]	[19]	120	80	0
	A	200	[10]	[14]	[11]	-11
	B	[8]	200	[13]	[11]	-11
	T	50	70	80	[5]	-5
	v	11	11	5	0	

■

7.4 Problema d'assignacions

Es tracta d'un problema de transport balancejat on tots els subministraments i totes les demandes valen 1. Això implica:

1. Hi ha d'haver n subministraments i n demandes (altrament no seria balancejat).
2. Totes les variables x_{ij} han de valer 0 o 1.
3. De les $n+n-1$ variables bàsiques, n'hi haurà n que valen 1 i $n-1$ que valen 0. Serà doncs, un problema altament degenerat.

El problema es pot formular com:

$$\begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s. a} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ & \quad x_{ij} \in \{0,1\} \end{array} \tag{7.2}$$

Donat l'alt grau de degeneració, resulta ineficient resoldre aquest tipus de problemes amb el mètode símplex, o el mètode símplex pel problema de transport. Resulta molt més eficient fer servir el "mètode hongarès" que s'explica a continuació.

1. Si el problema és de maximització, multiplicar la funció objectiu (els elements de la matriu de costos) per -1 i resoldre el problema de minimització.

2. Si el problema no està balancejat, afegir punts de subministrament o demanda amb cost 0 perquè el problema estigui balancejat.

3. Buscar l'element menor en cada fila de la matriu de costos i restar-ho a tots els elements de la fila. Repetir el mateix per totes les columnes.

4. Dibuixar el menor número de línies necessàries per cobrir tots els zeros de la matriu de costos. Si hi ha n línies, aleshores passar al punt 6 per buscar la solució òptima. Altrament passar al punt 5.

5. Buscar l'element menor k de la matriu de costos que no ha quedat cobert per les línies dibuixades en el pas anterior. Restar k a cada element no cobert per les línies, i sumar-ho als elements coberts per dues línies. Tornar al punt 4.

6. La solució òptima ve donada per aquelles n caselles que tenen un cost igual a 0, i que només n'hi ha una en cada fila i columna simultàniament.

   Per trobar-les busquem primer una fila o columna on només apareix un 0. Marquem la casella i ratllem la fila i columna on es troba (no hi pot haver més caselles en aquesta fila i columna). Repetim aquesta operació fins que trobem les n caselles.

El mètode es dóna sense demostració. La justificació del mètode es basa en les següents observacions: (i) Al sumar una constant al cost de cada fila (o columna) d'un problema de transport balancejat, la solució òptima no canvia. (ii) Una assignació factible en la que totes les variables x_{ij} que valen 1 tenen cost igual a 0, ha de ser òptima.

Exemple 7.4.1 Problema d'assignacions
Suposem que en una cadena de pizzeries es reben 3 trucades. La cadena disposa de 5 punts de subministrament. Es tracta de trobar quin és el repartiment de mínim cost, si el cost de cada punt de subministrament p_i a cada punt on es fa la trucada t_i és el que es dóna el la següent taula:

	t_1	t_2	t_3
p_1	10	11	18
p_2	6	7	7
p_3	7	8	5
p_4	5	6	4
p_5	9	4	7

Per a resoldre el problema, primer afegim dos punts de demanda artificials per tenir el problema balancejat, tal com mostra la iteració 0 de la següent figura. Restem el mínim en les files i columnes (iteració 1). Com que només necessitem 4 línies per cobrir els zeros, restem el mínim (iteració 2), d'on podem llegir l'assignació òptima: $x_{21} = 1$, $x_{52} = 1$, $x_{43} = 1$. Per tant portaríem una pizza de p_2 a t_1, de p_5 a t_2, i de p_4 a t_3 amb un cost de $6+4+4 = 14$.

Podem veure que l'assignació no és única. Amb la solució que es mostra en la iteració 2' també tenim un 0 en cada fila i columna, per tant, també és una assignació òptima. Efectivament, podem comprovar que el cost amb l'assignació 2' seria de: $c_{41}+c_{52}+c_{33} = 5+4+5 = 14$.

0. costos

10	11	18	0	0
6	7	7	0	0
7	8	5	0	0
5	6	4	0	0
9	4	7	0	0

1. costos

5	7	14	0	0
1	3	3	0	0
2	4	1	0	0
0	2	0	0	0
4	0	3	0	0

2. costos

4	6	13	0	[0]
[0]	2	2	0	0
1	3	0	[0]	0
0	2	[0]	1	1
4	[0]	3	1	1

2'. costos

4	6	13	0	[0]
0	2	2	[0]	0
1	3	[0]	0	0
[0]	2	0	1	1
4	[0]	3	1	1

■

Capítol 8

Algorismes dels plànols de tall de Gomory

Suposem un problema de programació lineal on algunes de les variables tenen la restricció addicional de ser enteres. El problema sense aquesta restricció es diu "problema associat o relaxat". La idea de Gomory és afegir restriccions o plànols de tall addicionals que deixen totes les solucions enteres en un costat i les solucions fraccionàries no desitjades en l'altra. Aquesta regla s'aplica iterativament fins a obtenir la solució òptima desitjada.

8.0.1 Plànols de tall fraccionaris

Aquest algorisme és vàlid per problemes on totes les variables son enteres. L'equació per generar els plànols de tall es dóna en forma de teorema:

Teorema 8.0.1 Plànols de tall fraccionaris de Gomory
Suposem que en la fila i de la taula símplex òptima del problema relaxat tenim una solució no entera que correspon a l'equació: $x_i + \sum_{j \in \mathcal{N}} \hat{a}_{ij} x_j = \hat{b}_i$, on $x_i = \hat{b}_i$ és el valor de la variable bàsica i $\mathcal{N}$ és el conjunt de variables no bàsiques en aquesta solució òptima del problema relaxat.

Si descomposem tots els coeficients amb la seva part entera i fraccionària positiva: $\hat{a}_{ij} = \lfloor \hat{a}_{ij} \rfloor + f_{ij}$, $\hat{b}_i = \lfloor \hat{b}_i \rfloor + f_i$, $0 \leq f_{ij} < 1$, $0 \leq f_i < 1$, podem reescriure l'equació de la fila i agrupant les parts enteres a l'esquerra i les fraccionàries a la dreta:

$$x_i + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor \hat{a}_{ij} \rfloor x_j - \lfloor \hat{b}_i \rfloor = -\sum_j f_{ij} x_j + f_i \tag{8.1}$$

El pla de tall que busquem és:

$$\begin{gathered}\text{Part fraccionaria de (8.1)} \leq 0 \Rightarrow \\ -\sum_{j \in \mathcal{N}} f_{ij} x_j \leq -f_i\end{gathered} \tag{8.2}$$

Demostració. Totes les solucions factibles que busquem son enteres i positives ($x_k \geq 0, \forall k$) i han de satisfer l'equació (8.1). Com que la part esquerra de l'equació (8.1) és entera, també ho haurà de ser la dreta, d'on deduïm que haurà de ser ≤ 0. Per tant, totes les solucions factibles enteres que busquem han de satisfer l'equació (8.2). En canvi, la solució òptima obtinguda pel problema relaxat: $x_i = \hat{b}_i$, $x_{j, j \in \mathcal{N}} = 0$ no satisfà l'equació (8.2) perquè al substituir tindríem: $f_i \leq 0$. □

Gomory va demostrar que aplicant successivament els plànols de tall definits d'aquesta manera l'algorisme convergeix a la solució en un nombre finit d'iteracions.

Observacions

- Notar que l'operador $\lfloor x \rfloor$ retorna el major enter $\leq x$. Per tant: $\lfloor -0{,}5 \rfloor = -1$. Això vol dir que la part fraccionària sempre serà positiva. Per exemple, si $\hat{a}_{ij} = -3/10 \Rightarrow \lfloor \hat{a}_{ij} \rfloor = -1$, $f_{ij} = \hat{a}_{ij} - \lfloor \hat{a}_{ij} \rfloor = -3/10 + 1 = 7/10$. Per tant, tots els termes de l'equació (8.2) han de ser negatius.
- Notar que el coeficient que multiplica la variable bàsica entera en l'equació que agafem per deduir el plànol de tall ha de valer 1.
- La restricció (8.2) la podem afegir directament a la taula òptima del problema relaxat, afegint una una variable de folgança addicional. Això donarà lloc a una solució no factible primal: $s_k - \sum_{j \in \mathcal{N}} f_{ij} x_{ij} = -f_i$. Aplicarem doncs el mètode símplex dual per a calcular la nova taula òptima (secció 4.4, pàgina 13).
- Per aplicar l'algorisme necessitem que tots els coeficients siguin enters: Si hi ha una restricció del tipus $x_1 + 0{,}5 x_2 \leq 3{,}6$ la substituirem per $10 x_1 + 5 x_2 \leq 36$.
- Si hi ha alguna variable acotada $0 \leq x_i \leq u_i$, aleshores afegir $x_i \leq u_i$ a la llista de restriccions.
- Si hi ha dos o més coeficients $\hat{b}_i$ fraccionaris, el mètode sol convergir més ràpidament si agafem el que té la part fraccionària f_i més propera a $1/2$.

Exemple 8.0.2 Gomory fraccionari

$$\begin{array}{ll} \max & z = 14x_1 + 18x_2 \\ \text{s.a} & -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 7x_1 + x_2 \leq 35 \\ & \qquad x_i \geq 0,\ x_i \text{ enters} \end{array}$$

Aplicant el mètode símplex al problema relaxat arribem a la taula òptima:

x_1	x_2	s_1	s_2	b
0	0	56/11	30/11	126
0	1	7/22	1/22	7/2
1	0	−1/22	3/22	9/2

Com que la part fraccionària de les dues restriccions val $1/2$ ($7/2 = 3 + 1/2$, $9/2 = 4 + 1/2$), triem arbitràriament la primera restricció. Al descomposar-la amb la part entera i fraccionària tenim: $x_2 - 3 = -7/22 s_1 - 1/22 s_2 + 1/2$, d'on deduïm el plànol de tall: $-7/22 s_1 - 1/22 s_2 \leq -1/2$. Afegint aquesta restricció a la taula símplex òptima del problema relaxat anterior i aplicant el mètode símplex dual tenim:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
	0	0	56/11	30/11	0	126
	0	1	7/22	1/22	0	7/2
	1	0	−1/22	3/22	0	9/2
	0	0	$\boxed{\text{-7/22}}$	−1/22	1	−1/2
$\frac{56/11}{7/22}=16$	0	0	0	2	16	118
1	0	1	0	0	1	3
−1/7	1	0	0	1/7	−1/7	32/7
−22/7	0	0	1	1/7	−22/7	11/7

Ara busquem un pla de tall per la segona restricció, on la solució encara no és entera: $x_1 - s_3 - 4 = -1/7 s_2 -$

$6/7 s_3 + 4/7 \Rightarrow -1/7 s_2 - 6/7 s_3 \leq -4/7$. Al afegir aquesta restricció a la taula anterior:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
	0	0	0	2	16	0	118
	0	1	0	0	1	0	3
	1	0	0	$1/7$	$-1/7$	0	$32/7$
	0	0	1	$1/7$	$-22/7$	0	$11/7$
	0	0	0	$\boxed{-1/7}$	$-6/7$	1	$-4/7$
14	0	0	0	0	4	14	110
	0	1	0	0	1	0	3
1	1	0	0	0	-1	1	4
1	0	0	1	0	-4	1	1
-7	0	0	0	1	6	-7	4

D'on llegim la solució òptima: $z = 110, x_1 = 4, x_2 = 3$. ■

8.0.2 Plànols de tall tot enters

L'algorisme dels plànols de tall fraccionaris de la secció 8.0.1 té l'inconvenient de que és difícil d'implementar en un computador degut al problema de l'arrodoniment. Per aquest motiu Gomory va proposar l'algorisme explicat en aquesta secció on tots els coeficients de les taules símplex de les successives iteracions son enters (d'aquí el nom de "tot enters"). La idea del plànol de tall és la mateixa que en el cas fraccionari, però es tria un plànol amb tots els coeficients enters i un pivot igual a 1 o -1, de manera que al iterar en aquest pivot (aplicant el mètode dual del símplex si el pivot és -1) s'obtingui una nova taula amb els coeficients enters. L'equació per generar els plànols de tall es dóna en forma de teorema:

Teorema 8.0.2 Plànols de tall tot enters de Gomory Suposem que en qualsevol fila i corresponent a una restricció de la taula símplex tenim l'equació: $x_i + \sum_{j \in \mathcal{N}} \hat{a}_{ij} x_j = \hat{b}_i$, on $x_i = \hat{b}_i$ és el valor de la variable bàsica i $\mathcal{N}$ és el conjunt de variables no bàsiques. Aleshores, per qualsevol $\lambda > 1$, la següent equació és un plànol de tall que satisfan totes les solucions enteres del problema:

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} \left\lfloor \frac{\hat{a}_{ij}}{\lambda} \right\rfloor x_j \leq \left\lfloor \frac{\hat{b}_i}{\lambda} \right\rfloor \tag{8.3}$$

Demostració. Si dividim la restricció $x_i + \sum_{j \in \mathcal{N}} \hat{a}_{ij} x_j = \hat{b}_i$ per $\lambda > 1$ i descomposem tots els coeficients resultants amb la seva part entera i fraccionària positiva: $\hat{a}_{ij}/\lambda = \lfloor \hat{a}_{ij}/\lambda \rfloor + f_{ij}$, $\hat{b}_i = \lfloor \hat{b}_i/\lambda \rfloor + f_i$, $0 \leq f_{ij} < 1$, $0 \leq f_i < 1$, podem reescriure l'equació de la fila i agrupant les parts enteres a l'esquerra i les fraccionàries a la dreta:

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} \left\lfloor \frac{\hat{a}_{ij}}{\lambda} \right\rfloor x_j - \left\lfloor \frac{\hat{b}_i}{\lambda} \right\rfloor = \frac{-1}{\lambda} x_i - \sum_j f_{ij} x_j + f_i \tag{8.4}$$

Totes les solucions factibles que busquem son enteres i positives ($x_k \geq 0, \forall k$) i han de satisfer l'equació (8.4). Com que la part esquerra de l'equació (8.4) és entera, també ho haurà de ser la dreta, d'on deduïm que haurà de ser ≤ 0. Per tant, totes les solucions factibles enteres que busquem han de satisfer l'equació (8.3). □

La qüestió és triar les restriccions i els factors λ per afegir els plànols més convenients. Per accelerar la convergència, interessarà triar els factors λ més petits possible, però que donin lloc a pivots iguals a 1 o -1. A continuació hi ha un algorisme que busca aquest objectiu. L'algorisme es dóna sense justificació, veure [2] per més detalls.

Primer introduirem el concepte d'ordre lexicogràfic. Es diu que un vector columna és lexicogràficament positiu (negatiu) si el seu primer element diferent de zero és positiu (negatiu). Un vector $\boldsymbol{x}$ és lexicogràficament major que un vector $\boldsymbol{y}$ si la seva diferència $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ és lexicogràficament positiva. Per exemple, $\boldsymbol{x}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ és lexicogràficament positiu i menor que $\boldsymbol{y}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

L'algorisme és el següent:

1. Formular el problema (si cal) en la forma de maximització.

2. Començar amb una taula símplex amb tots els coeficients enters i una solució dual factible (coeficients de les variables en la "fila 0" ≥ 0). Si és necessari, afegir plànols de tall amb pivots iguals a 1 fins aconseguir-ho (veure l'explicació que es dóna en les observacions). La taula serà primal no factible, altrament serà òptima.

3. Seleccionar la fila primal no factible r amb el valor $\hat{b}_r$ més negatiu.

4. Si la fila r té un pivot -1, pivotar i tornar al punt 3.

5. Sigui $\mathcal{N}$ el conjunt de columnes que pertanyen a les variables no bàsiques. Triar la columna $k \in \mathcal{N}$ lexicogràficament menor (sense tenir en compte els coeficients negatius) i que té un element negatiu en la fila r ($\hat{a}_{rk} < 0$). El primer element major que zero d'aquesta columna l'anomenarem $\hat{a}_{pk} > 0$.

6. Per tots els elements de la fila r, columna $j \in \mathcal{N}$ amb $\hat{a}_{rj} < 0$, calcular:

$$e_j = \left\lfloor \frac{\hat{a}_{pj}}{\hat{a}_{pk}} \right\rfloor, \; j \in \mathcal{N}, \; \hat{a}_{rj} < 0 \tag{8.5}$$

on $\hat{a}_{pj}$ és el primer element major que zero de la columna j. Si el primer element major que zero de la columna j no està en la fila p, aleshores $e_j = \infty$. Notar que almenys un dels e_j ha de valer 1: El de la columna lexicogràficament menor, on serà: $\hat{a}_{pj} = \hat{a}_{pk}$.

7. D'entre tots els elements de la fila r, columna $j \in \mathcal{N}$ amb $\hat{a}_{rj} < 0$, d'on hem calculat $e_j \neq \infty$, calcular:

$$\lambda = \max_{\substack{j\in\mathcal{N}\\ \hat{a}_{rj}<0\\ e_j\neq\infty}} \frac{|\hat{a}_{rj}|}{e_j} \tag{8.6}$$

   Notar que ha de ser $\lambda > 1$, i pot ser un número no enter. Si $\lambda = 1$, voldria dir que ja hi ha un pivot igual a -1 en la fila k.

8. A partir de la fila r calcular el plànol de tall:

$$\sum_{j\in\mathcal{N}} \left\lfloor \frac{\hat{a}_{rj}}{\lambda} \right\rfloor x_j \leq \left\lfloor \frac{\hat{b}_r}{\lambda} \right\rfloor \tag{8.7}$$

   Notar que els coeficients de l'esquerra del plànol de tall (8.7) han de ser enters positius o negatius, i almenys 1 d'ells ha de valer -1. El coeficient de la dreta ha de ser negatiu.

9. Afegir el plànol de tall (8.7) a la taula símplex amb la seva corresponent variable de folgança. Pivotar en un coeficient -1 aplicant el mètode dual del símplex i tornar al punt 2.

Observacions

- Notar que l'operador $\lfloor x \rfloor$ retorna el major enter $\leq x$. Per tant: $\lfloor -0,5 \rfloor = -1$.
- En la taula inicial no cal tenir en compte les variables de folgança.
- Si la taula inicial no és dual factible, provar de pivotar en algun element per aconseguir-ho (en aquest cas si que caldrà afegir la variable de folgança). Si és necessari, afegir plànols de tall amb pivots iguals a 1 en les posicions on hi ha coeficients de la fila 0 negatius, i pivotar en aquesta restricció per aconseguir la taula desitjada.

Exemple 8.0.3 Gomory tot enters – I

Ara resoldrem l'exemple 8.0.2 amb l'algorisme tot enters. El problema és:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 14x_1 + 18x_2 \\ \text{s.a} \quad & -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 7x_1 + \;\; x_2 \leq 35 \\ & x_i \geq 0,\ x_i \text{ enters} \end{aligned}$$

Iteració 1 La taula símplex és:

x_1	x_2	b
-14	-18	0
-1	3	6
7	1	35

No és dual-factible, però podem pivotar en x_2 per aconseguir-ho:

	x_1	x_2	s_1	b	
	-14	-18	0	0	
	-1	3	0	6	
	7	$\boxed{1}$	1	35	
18	112	0	18	630	
-3	-22	0	-3	-99	←
	7	1	1	35	

Iteració 2 Seleccionem la fila r indicada en la taula anterior, i calculem: $a_{pk} = 18$, $e_{x_1} = \left\lfloor \frac{112}{18} \right\rfloor = 6$, $e_{s_1} = \left\lfloor \frac{18}{18} \right\rfloor = 1$, $\lambda = \max\{\frac{22}{6}, \frac{3}{1}\} = \frac{22}{6}$, i el pla de tall és:

$$\left\lfloor \frac{-22}{22/6} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor \frac{-3}{22/6} \right\rfloor s_1 \leq \left\lfloor \frac{-99}{22/6} \right\rfloor \Rightarrow$$

$$-6x_1 - s_1 \leq -27$$

Afegint el plànol de tall i pivotant:

	x_1	x_2	s_1	s_2	b	
	112	0	18	0	630	
	-22	0	-3	0	-99	
	7	1	1	0	35	
	-6	0	$\boxed{-1}$	1	-27	
18	4	0	0	18	144	
-3	-4	0	0	-3	-18	←
1	1	1	0	1	8	
-1	6	0	1	-1	27	

Nota: En cada iteració convé comprovar si la solució actual és correcte. Per exemple, en aquesta iteració: $x_1 = 0$, $x_2 = 8$, $z = 14 \times 0 + 18 \times 8 = 144$✓.

Iteració 3 Seleccionem la fila r indicada en la taula anterior, i calculem: $a_{pk} = 4$, $e_{x_1} = \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor = 1$, $e_{s_2} = \left\lfloor \frac{18}{4} \right\rfloor = 4$, $\lambda = \max\{\frac{4}{1}, \frac{3}{4}\} = 4$, i el pla de tall és:

$$\left\lfloor \frac{-4}{4} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor \frac{-3}{4} \right\rfloor s_2 \leq \left\lfloor \frac{-18}{4} \right\rfloor \Rightarrow$$

$$-x_1 - s_2 \leq -5$$

Afegint el plànol de tall i pivotant:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	
	4	0	0	18	0	144	
	−4	0	0	−3	0	−18	
	1	1	0	1	0	8	
	6	0	1	−1	0	27	
	$\boxed{-1}$	0	0	−1	1	−5	
4	0	0	4	14	4	124	
−4	0	0	0	1	−4	2	
1	0	1	0	0	1	3	
6	0	0	1	−7	6	−3	←
−1	1	0	0	1	−1	5	

Iteració 4 Seleccionem la fila r indicada en la taula anterior, i calculem: $a_{pk}=14$, $e_{s_2}=\left\lfloor\frac{14}{14}\right\rfloor=1$, $\lambda=\max\{\frac{7}{1}\}=7$, i el pla de tall és:

$$\left\lfloor\frac{1}{7}\right\rfloor s_1+\left\lfloor\frac{-7}{7}\right\rfloor s_2+\left\lfloor\frac{6}{7}\right\rfloor s_3\le\left\lfloor\frac{-3}{7}\right\rfloor \Rightarrow$$

$$-s_2\le -1$$

Afegint el plànol de tall i pivotant:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
	0	0	4	14	4	0	124
	0	0	0	1	−4	0	2
	0	1	0	0	1	0	3
	0	0	1	−7	6	0	−3
	1	0	0	1	−1	0	5
	0	0	0	$\boxed{-1}$	0	1	−1
14	0	0	4	0	4	14	110
1	0	0	0	0	−4	1	1
0	0	1	0	0	1	0	3
−7	0	0	1	0	6	−7	4
1	1	0	0	0	−1	1	4
−1	0	0	0	1	0	−11	1

D'on llegim la solució: $z=110, x_1=4, x_2=3$, tal com hem obtingut amb el mètode fraccionari de l'exemple 8.0.2. ■

Exemple 8.0.4 Gomory tot enters – II
Resoldre el problema:

$$\begin{aligned} \max\quad & z=4x_1+6x_2+2x_3 \\ \text{s.a}\quad & 4x_1-4x_2 \le 5 \\ & -x_1+6x_2 \le 5 \\ & -x_1+x_2+x_3 \le 5 \\ & x_i\ge 0,\ x_i \text{ enters} \end{aligned}$$

Iteració 1 Plantegem la taula símplex i pivotem per intentar aconseguir una solució dual-factible:

	x_1	x_2	x_3	s_1	b	
	−4	−6	−2	0	0	
	4	−4	0	0	5	
	−1	6	0	0	5	
	−1	$\boxed{1}$	1	1	5	
6	−10	0	4	6	30	
4	0	0	4	4	25	
−6	5	0	−6	−6	−25	←
1	−1	1	1	−1	5	

Iteració 2 Com que la taula símplex encara no és dual-factible, dividim la fila indicada en la taula anterior per 5 per generar el plànol de tall amb un pivot igual a 1 en x_1: $\lfloor 5/5\rfloor x_1+\lfloor -6/5\rfloor x_3+\lfloor -6/5\rfloor s_1=\lfloor -25/5\rfloor \Rightarrow x_1-2x_3-2s_1=-5$. Afegint aquest plànol de tall i pivotant:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b	
	−10	0	4	6	0	30	
	0	0	4	4	0	25	
	5	0	−6	−6	0	−25	
	−1	1	1	−1	0	5	
	$\boxed{1}$	0	−2	−2	1	−5	
10	0	0	−16	−14	10	−20	
0	0	0	4	4	0	25	←
−5	0	0	4	4	−5	0	
1	0	1	−11	−1	1	0	
	1	0	−2	−2	1	−5	

Iteració 3 Com que la taula símplex encara no és dual-factible, dividim la fila indicada en la taula anterior per 4 per generar el plànol de tall amb un pivot igual a 1 en x_3: $\lfloor 4/4\rfloor x_3+\lfloor 4/4\rfloor s_1=\lfloor 25/4\rfloor \Rightarrow x_3+s_1=6$. Afegint aquest plànol de tall i pivotant:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b	
	0	0	−16	−14	10	0	−20	
	0	0	4	4	0	0	25	
	0	0	4	4	−5	0	0	
	0	1	−11	−1	1	0	0	
	1	0	−2	−2	1	0	−5	
	0	0	$\boxed{1}$	1	0	1	6	
16	0	0	0	2	10	16	76	
−4	0	0	0	0	0	−4	1	
−4	0	0	0	0	−5	−4	−24	←
1	0	1	0	0	1	1	6	
2	1	0	0	0	1	2	7	
	0	0	1	1	0	1	6	

Iteració 4 La taula símplex ja és dual-factible. Ara dividim la fila indicada en la taula anterior per 5 per generar el plànol de tall $\lfloor -5/5 \rfloor s_2 + \lfloor -4/5 \rfloor s_3 = \lfloor -24/5 \rfloor \Rightarrow -s_2 - s_3 = -5$. Afegint aquest plànol de tall i pivotant:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b
	0	0	0	2	10	16	0	76
	0	0	0	0	0	−4	0	1
	0	0	0	0	−5	−4	0	−24
	0	1	0	0	1	1	0	6
	1	0	0	0	1	2	0	7
	0	0	1	1	0	1	0	6
	0	0	0	0	$\boxed{-1}$	−1	1	−5
10	0	0	0	2	0	6	10	26
0	0	0	0	0	0	−4	0	1
−5	0	0	0	0	0	1	−5	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	2
0	0	0	1	1	0	1	0	6
−1	0	0	0	0	1	1	−1	5

D'on llegim la solució: $z = 26, x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 6$.

■

8.0.3 Problemes mixtos

La deducció del pla de tall s'aconsegueix amb un raonament anàleg a l'algorisme dels plànols de tall fraccionaris (secció 8.0.1), però amb la complexitat addicional que introdueix la presència de les variables no enteres (veure [2] per més detalls). Donem el resultat sense demostració:

1. Suposem que en la fila i de la taula símplex òptima del problema relaxat tenim una solució no entera que correspon a l'equació genèrica: $x_i + \sum_{j \in \mathcal{N}} \hat{a}_{ij} x_j = \hat{b}_i$, on $x_i = \hat{b}_i$ és el valor de la variable bàsica, que desitgem sigui entera, i $\mathcal{N}$ és el conjunt de variables no bàsiques en aquesta solució òptima del problema relaxat.

2. Sigui $\mathcal{N}^e \subset \mathcal{N}$ el subconjunt de variables de $\mathcal{N}$ que desitgem siguin enteres, i $\mathcal{N}^r \subset \mathcal{N}$ el subconjunt de variables de $\mathcal{N}$ que poden ser no enteres.

3. Descomposem tots els coeficients de les variables enteres amb la seva part entera i fraccionària positiva: $\hat{a}_{ij} = \lfloor \hat{a}_{ij} \rfloor + f_{ij}$, $j \in \mathcal{N}^e$, $\hat{b}_i = \lfloor \hat{b}_i \rfloor + f_i$, $0 \leq f_{ij} < 1$, $0 \leq f_i < 1$.

El pla de tall que busquem és:

$$\underbrace{-\sum_{\substack{j \in \mathcal{N}^r \\ \hat{a}_{ij} \geq 0}} \hat{a}_{ij} x_j + \sum_{\substack{j \in \mathcal{N}^r \\ \hat{a}_{ij} < 0}} \frac{f_i}{1-f_i} \hat{a}_{ij} x_j}_{\text{variables no enteres}}$$

$$\underbrace{-\sum_{\substack{j \in \mathcal{N}^e \\ f_{ij} \leq f_i}} f_{ij} x_j - \sum_{\substack{j \in \mathcal{N}^e \\ f_{ij} > f_i}} \frac{f_i}{1-f_i} (1-f_{ij}) x_j}_{\text{variables enteres}} \leq -f_i \qquad (8.8)$$

Observacions

- Notar que l'operador $\lfloor x \rfloor$ retorna el major enter $\leq x$. Per tant: $\lfloor -0{,}5 \rfloor = -1$. Això vol dir que la part fraccionària sempre serà positiva. Per exemple, si $\hat{a}_{ij} = -3/10 \Rightarrow \lfloor \hat{a}_{ij} \rfloor = -1$, $f_{ij} = \hat{a}_{ij} - \lfloor \hat{a}_{ij} \rfloor = -3/10 + 1 = 7/10$. Per tant, tots els termes de l'equació (8.8) han de ser negatius.

- El coeficient que multiplica la variable bàsica entera en l'equació que agafem per deduir el plànol de tall ha de valer 1.

- Al introduir la restricció (8.8) haurem d'afegir una variable de folgança addicional, que donarà lloc a una solució no factible primal. Aplicarem doncs el mètode símplex dual (secció 4.4, pàgina 13).

- Si hi ha alguna variable acotada $0 \leq x_i \leq u_i$, aleshores afegir $x_i \leq u_i$ a la llista de restriccions.

- Si hi ha dues o més variables enteres amb coeficients $\hat{b}_i$ fraccionaris, el mètode sol convergir més ràpidament si agafem la que té el $\max\{\hat{b}_i\}$.

Exemple 8.0.5 Problemes mixtos
Suposem l'exemple 8.0.2, on només x_1 és entera:

$$\begin{array}{ll} \max & z = 14x_1 + 18x_2 \\ \text{s.a} & -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 7x_1 + x_2 \leq 35 \\ & \qquad x_i \geq 0,\ x_1 \text{ enter} \end{array}$$

Aplicant el mètode símplex al problema relaxat arribem a la taula òptima:

x_1	x_2	s_1	s_2	b
0	0	56/11	30/11	126
0	1	7/22	1/22	7/2
1	0	−1/22	3/22	9/2

D'on $x_1 = 9/2 = 4 + 1/2$. Per tant, apliquem el mètode de Gomory per problemes mixtos, on $f_i = 1/2$, $\frac{f_i}{1-f_i} =$

1. Com que la única variable entera és x_1, tenim:

$$-\sum_{\substack{j\in\mathcal{N}^r\\ \hat{a}_{ij}\geq 0}} \hat{a}_{ij}x_j = -3/22s_2$$

$$\sum_{\substack{j\in\mathcal{N}^r\\ \hat{a}_{ij}<0}} \frac{f_i}{1-f_i}\hat{a}_{ij}x_j = -1/22s_1$$

D'on el pla de tall és: $-3/22s_2 - 1/22s_1 \leq -1/2$. Afegint aquesta restricció a la taula símplex anterior i aplicant el mètode símplex dual tenim:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
	0	0	56/11	30/11	0	126
	0	1	7/22	1/22	0	7/2
	1	0	−1/22	3/22	0	9/2
	0	0	−1/22	$\boxed{\text{-3/22}}$	1	−1/2
$\frac{30/11}{3/22}=20$	0	0	46/11	0	20	116
1/3	0	1	10/33	0	1/3	10/3
1	1	0	−1/11	0	1	4
−22/3	0	0	1/3	1	−22/3	11/3

D'on llegim la solució òptima: $z = 116, x_1 = 4, x_2 = 10/3$. ■

Capítol 9

Mètodes de ramificació (*branch and bound*)

9.0.4 Mètode general o de Dakin

Suposem que en un problema de maximització amb enters, la solució del problema relaxat té la solució fraccionària $x_i = \hat{b}_i$ per a la variable entera x_i. Aleshores, afegint les restriccions $x_i \leq \lfloor\hat{b}_i\rfloor$ $x_i \geq \lfloor\hat{b}_i\rfloor + 1$ tenim dos nous subproblemes que particionen les solucions possibles enteres, i exclouen la solució fraccionaria no desitjada.

Basat amb aquesta idea, podem seguir el següent algorisme per resoldre problemes enters mixtos (algorisme de Land-Doig millorat, o de Dakin). Suposem un problema de maximització. Primer introduïm les següent definicions:

1. Subproblema: És el problema que resulta d'afegir alguna restricció addicional al problema inicial relaxat. Al problema inicial l'anomenarem subproblema 0.

2. Ramificació (*branching*) en una variable x_i amb valor fraccionari $\hat{b}_i$ que desitgem sigui entera: Consisteix en generar dos subproblemes afegint les restriccions: $x_i \leq \lfloor\hat{b}_i\rfloor$ i $x_i \geq \lfloor\hat{b}_i\rfloor + 1$.

3. Solució candidata: Si al resoldre un subproblema s'obté una solució entera per totes les variables enteres desitjades.

4. Subproblema sondejat (*fathomed*). És quan deduïm que totes les solucions que resulten de la ramificació d'un subproblema no seran òptimes, per tant, no cal ramificar-ho. Això passa quan la solució d'un subproblema compleix una de les següents condicions:

   - S'obté una solució candidata: No cal ramificar perquè totes les solucions candidates de les ramificacions d'aquest subproblema tindran un valor de la funció objectiu inferior. Per tant, no poden ser òptimes.

   - S'obté una solució no candidata, però amb un cost inferior a una solució candidata obtinguda en algun altra subproblema: No cal ramificar perquè totes les solucions candidates de les ramificacions d'aquest subproblema tindran un valor de la funció objectiu inferior. Per tant, no poden ser òptimes.

   - No hi ha solucions factibles. No cal ramificar perquè les ramificacions tampoc tindran solucions factibles.

L'algorisme és el següent:

1. Resolem el problema relaxat (subproblema 0). Si la solució és òptima (entera per totes les variables enteres desitjades), el problema està resolt. Altrament, el valor de la funció objectiu és una cota superior per la solució òptima del problema, i continuem amb el punt 2.

2. Agafem una variable x_i amb valor fraccionari $\hat{b}_i$ que desitgem sigui entera, ramifiquem dos subproblemes en x_i i continuem amb el punt 3.

3. Resoldre un subproblema relaxat. Pot ser que:

   (a) El subproblema quedi sondejat. Continuem amb el punt 4.

   (b) No hi hagi una solució candidata (perquè hem obtingut un valor fraccionari per alguna de les variables enteres). Continuem amb el punt 2.

4. Si queden subproblemes per resoldre, agafem l'últim subproblema que hem afegit (estratègia *last in first out*, LIFO) i continuem amb el punt 3.

   Si no queden subproblemes per resoldre, la solució candidata de major valor de la funció objectiu és la solució òptima.

Exemple 9.0.6 Mètodes de ramificació
Suposem l'exemple 8.0.5:

$$\begin{array}{rl} \max & z = 14x_1 + 18x_2 \\ \text{s.a} & -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 7x_1 + \ \ x_2 \leq 35 \\ & \qquad x_i \geq 0,\ x_1 \text{ enter} \end{array}$$

Subproblema 0 Aplicant el mètode símplex al problema relaxat arribem a la taula òptima:

x_1	x_2	s_1	s_2	b
0	0	56/11	30/11	126
0	1	7/22	1/22	7/2
1	0	−1/22	3/22	9/2

D'on la solució del subproblema 0 és: $x_1 = 9/2 = 4+1/2$, $x_2 = 7/2$, $z = 126$. Com que el valor de x_1 no és enter, ramifiquem en x_1 amb les restriccions: $S_1 : x_1 \leq 4$, $S_2 : x_1 \geq 5$ (amb S_i identifiquem el subproblema i).

Subproblema 1 Aplicant el mètode símplex al subproblema relaxat $S_1 : x_1 \leq 4$:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
	0	0	56/11	30/11	0	126
	0	1	7/22	1/22	0	7/2
	$\boxed{1}$	0	−1/22	3/22	0	9/2
	1	0	0	0	1	4
	0	0	56/11	30/11	0	126
	0	1	7/22	1/22	0	7/2
	1	0	−1/22	3/22	0	9/2
−1	0	0	1/22	$\boxed{\text{-3/22}}$	1	−1/2
$\frac{30}{11}\,\frac{22}{3}=20$	0	0	46/11	0	20	116
$\frac{7}{22}\,\frac{22}{1}=7$	0	1	1/3	0	1/3	10/3
1	1	0	0	0	1	4
−22/3	0	0	−1/3	1	−22/3	11/3

D'on llegim la solució candidata: $x_1 = 4$, $x_2 = 10/3$, $z = 116$, i el subproblema S_1 queda sondejat.

Subproblema 2 Aplicant el mètode símplex al subproblema relaxat $S_2 : x_1 \geq 5$:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
	0	0	56/11	30/11	0	126
	0	1	7/22	1/22	0	7/2
	$\boxed{1}$	0	−1/22	3/22	0	9/2
	−1	0	0	0	1	−5
	0	0	56/11	30/11	0	126
	0	1	7/22	1/22	0	7/2
	1	0	−1/22	3/22	0	9/2
1	0	0	$\boxed{\text{-1/22}}$	3/22	1	−1/2
$\frac{56}{11}\,\frac{22}{1}=112$	0	0	0	86/11	112	70
$\frac{7}{22}\,\frac{22}{1}=7$	0	1	0	1	7	0
−1	1	0	0	0	−1	5
−22	0	0	1	−3	−22	11

D'on llegim la solució candidata: $x_1 = 5, x_2 = 0, z = 70$, i el subproblema S_1 queda sondejat. Com que no hi ha més subproblemes per resoldre i S_1 dóna el valor màxim, es conclou que S_1 dóna la solució òptima del problema. Podem comprovar que coincideix amb la solució obtinguda en l'exemple 8.0.5. ■

9.0.5 Enumeració implícita

Normalment es fa servir per resoldre problemes de tipus "0-1", on les variables x_i tenen la restricció $x_i \in \{0, 1\}$. Degut a la naturalesa binària de les variables, és fàcil fer servir el mètode de ramificació i prendre decisions lògiques directament sobre el problema per saber quan un subproblema està sondejat o cal ramificar-ho. En cada ramificació fixarem el valor d'una variable ($x_i = 0$ i $x_i = 1$ en cada rama).

Definicions: Les variables que tenen un valor assignat en les ramificacions s'anomenen "variables fixes". Les variables a les que no hem assignat un valor en les ramificacions s'anomenen "variables lliures". Anomenarem "compleció" al valor de la funció objectiu que s'obté al assignar un valor a totes les variables lliures. Si la compleció és factible, serà una "solució candidata".

Suposem un problema de maximització. L'algorisme és el següent:

1. Busquem per inspecció la compleció òptima del problema inicial (subproblema 0). Si la compleció és factible, el problema està resolt. Altrament, la compleció és una cota superior per la solució òptima del problema, i continuem amb el punt 2.

2. Ramifiquem dos subproblemes en una variable lliure x_i i continuem amb el punt 3.

3. Busquem per inspecció la compleció òptima d'un subproblema pendent de resoldre. Pot ser que:

   (a) El subproblema quedi sondejat. Continuem amb el punt 4.
   (b) No hi hagi una solució candidata (perquè la compleció òptima no sigui factible). Continuem amb el punt 2.

4. Si queden subproblemes per resoldre, agafem l'últim subproblema que hem afegit (estratègia *last in first out*, LIFO) i continuem amb el punt 3.

   Si no queden subproblemes per resoldre, la compleció de major valor és la solució òptima.

Observacions

- Qualsevol problema de programació entera es pot formular com un problema "0-1" de la següent manera: Suposem que per a la variable x_i del problema podem trobar un enter n tal que $x_i < 2^{n+1}$. Aleshores podem descomposar x_i amb les variables binàries $u_i \in \{0,1\}$: $x_i = u_0 + 2u_1 + 2^2 u_2 + \cdots 2^n u_n$. Fent aquesta descomposició per a totes les variables del problema inicial, obtindrem un problema en termes de les variables binàries u_i.

Exemple 9.0.7 Enumeració implícita
Suposem el problema:

$$\begin{array}{rl} \max & z = -7x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 \\ \text{s.a} & -4x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq -3 \\ & -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 \leq -7 \\ & x_i \geq 0,\ x_i \in \{0,1\} \end{array}$$

Subproblema 0 Per inspecció del problema inicial deduïm que la compleció òptima és $z = 0$ (donant el valor 1 a les variables amb coeficients de la funció objectiu positius, i 0 als negatius). La compleció òptima s'obté assignant el valor 0 a totes les variables. Substituint en les restriccions, podem comprovar que aquesta solució no és factible, tot i que hi ha solucions factibles, per tant, ramifiquem el subproblema 0 en x_1.

Subproblema 1 ($x_1 = 1$) La compleció òptima és $z = -7$, però no és factible, tot i que hi ha solucions factibles.

Subproblema 2 ($x_1 = 0$) La compleció òptima és $z = 0$, però no és factible, i no hi ha solucions factibles (la segona restricció no es pot complir fixant $x_1 = 0$. Per tant, el node queda sondejat.

Ramifiquem el subproblema 1 en x_2:

Subproblema 3 ($x_2 = 1$) La compleció òptima és $z = -10$, però no és factible, tot i que hi ha solucions factibles.

Subproblema 4 ($x_2 = 0$) La compleció òptima és $z = -7$, però no és factible, tot i que hi ha solucions factibles.

Ramifiquem el subproblema 4 en x_3:

Subproblema 5 ($x_3 = 1$) La compleció òptima és $z = -9$ i és factible, per tant, el node queda sondejat.

Subproblema 6 ($x_3 = 0$) La compleció òptima és $z = -7$, però no hi ha solucions factibles, per tant, el node queda sondejat.

Queda per ramificar el subproblema 3, però com que la compleció òptima és pitjor que la compleció factible obtinguda en el subproblema 5, el subproblema 3 queda sondejat i el subproblema 5 dóna la solució òptima: $z = -9, x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$.

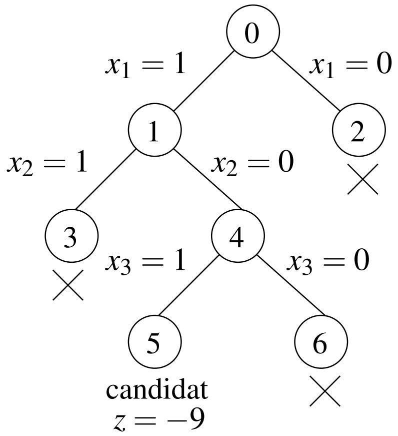


Figura 9.1: Arbre de les ramificacions de l'exemple 9.0.7.

Quan hi ha molts subproblemes convé fer un arbre per seguir les ramificacions, tal com mostra la figura 9.1. Quan un node queda sondejat, el marquem amb una creu. ■

9.0.6 Problema del viatjant

Formulació: Un viatjant ha de visitar n ciutats: $t_1, \cdots t_n$. Associem un cost c_{ij} per viatjar de la ciutat i a j, $i, j \in \{t_1, \cdots t_n\}$. Els costos els donarem en forma de matriu, on definim $c_{ii} = \infty$, per representar que hi ha que viatjar sempre d'una ciutat a una altra diferent:

destinacions

$$\text{origens}\quad\begin{array}{c|c|c|c|c|} & t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ \hline t_1 & \infty & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \hline t_2 & c_{21} & \infty & \cdots & c_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline t_n & c_{n1} & c_{n1} & \cdots & \infty \\ \hline \end{array}$$

Definim una ruta com la seqüència de ciutats visitades pel viatjant, de forma que es visiten totes les ciutats, i la última ciutat és la de partida. Per exemple, si representem per $i \to j$ el viatge de la ciutat i a j, aleshores $(i \to j \to k \cdots l \to i)$, $i \neq j \neq k \cdots \neq l$, és una ruta. Es tracta de trobar la ruta que minimitza el cost.

Per formular el problema definim les variables:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{es viatja de la ciutat } i \text{ a } j \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} \tag{9.1}$$

En termes de les variables (9.1), la ruta $(i \to j \to k \cdots l \to i)$ vindrà donada per la seqüència $(x_{ij} = 1, x_{ik} = 1, \cdots, x_{li} = 1)$. Si representem els valors de les variables x_{ij} en una matriu, al connectar les variables $x_{ij} = 1$ que donen lloc a una ruta, obtindrem una línia poligonal tancada, com mostra la següent figura.

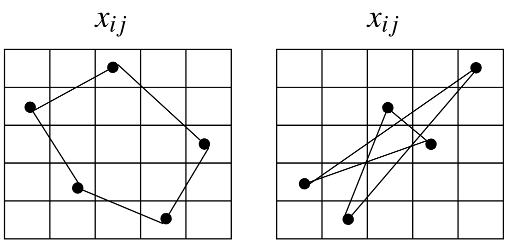


Figura 9.2: Exemple de possibles rutes.

El problema es pot formular com:

$$\begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ & \quad x_{ij} \in \{0,1\} \\ & \quad x_{ij} \quad \text{formen una ruta.} \end{array} \tag{9.2}$$

Si ho comparem amb el problema d'assignacions (equació (7.2), pàg. 22), podem veure que és el mateix, amb la restricció addicional de que l'assignació triada formi una ruta.

Algorisme d'Eastman

Si relaxem la condició de que x_{ij} formen una ruta i resolem el problema d'assignació resultant (per exemple, amb el mètode hongarès explicat en la secció 7.4, pàg. 22), al intentar connectar la seqüència de $x_{ij} = 1$ possiblement obtindrem "subrutes", com es mostra en la següent figura:

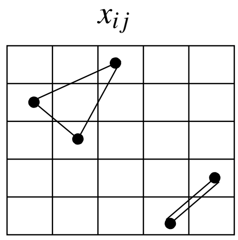


Figura 9.3: Exemple de solució amb subrutes.

La idea de l'algorisme d'Eastman és ramificar de forma que s'evitin les subrutes:

1. Relaxem la condició de que x_{ij} formen una ruta i resolem el problema d'assignació resultant (subproblema 0). Si no hi ha subrutes, la solució és òptima. Altrament, el valor de la funció objectiu és una cota inferior per la solució òptima del problema, i continuem amb el punt 2.

2. Triem la subruta que tingui el menor nombre de $x_{ij} = 1$, ramifiquem imposant en cada ramificació $c_{ij} = \infty$ per cada un dels $x_{ij} = 1$ i continuem amb el punt 3.

3. Resoldre un subproblema relaxat. Pot ser que:
   - (a) El subproblema quedi sondejat. Continuem amb el punt 4.
   - (b) No hi hagi una solució candidata (perquè les $x_{ij} = 1$ no formen una ruta). Continuem amb el punt 2.

4. Si queden subproblemes per resoldre, agafem l'últim subproblema que hem afegit (estratègia *last in first out*, LIFO) i continuem amb el punt 3.

   Si no queden subproblemes per resoldre, la solució candidata de menor valor de la funció objectiu és la solució òptima.

Exemple 9.0.8 Algorisme d'Eastman

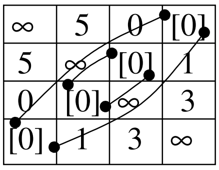
Suposem un problema del viatjant amb la següent matriu de costos:

destinacions

$$\text{origens}\quad\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \infty & 10 & 2 & 4 \\ \hline 10 & \infty & 5 & 8 \\ \hline 2 & 5 & \infty & 7 \\ \hline 4 & 8 & 7 & \infty \\ \hline \end{array}$$

costos

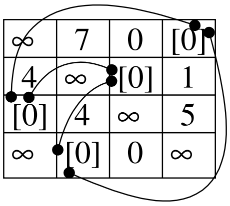
Subproblema 0 Aplicant al mètode hongarès al problema relaxat arribem a la taula òptima:



∞	5	0	[0]
5	∞	[0]	1
0	[0]	∞	3
[0]	1	3	∞

D'on llegim el cost $z = 18$ i les subrutes x_{14}, x_{41} i x_{23}, x_{32}.

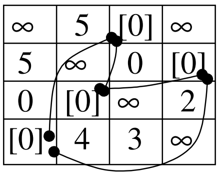
Subproblema 1 Ramificant en la subruta x_{14}, x_{41}, tenim que la taula òptima per el subproblema relaxat amb $c_{41} = \infty$ és:



∞	7	0	[0]
4	∞	[0]	1
[0]	4	∞	5
∞	[0]	0	∞

D'on llegim una solució candidata amb cost $z = 19$, i el subproblema queda sondejat.

Subproblema 2 La taula òptima per el subproblema relaxat amb $c_{14} = \infty$ és:



∞	5	[0]	∞
5	∞	0	[0]
0	[0]	∞	2
[0]	4	3	∞

D'on llegim una solució candidata amb cost $z = 19$ (igual que en el subproblema 1), i el subproblema queda sondejat.

Així doncs, el problema queda resolt amb la solució òptima $z = 19$ assolida en les solucions candidates dels subproblemes 1 i 2.

Podem observar que les posicions de les solucions candidates dels subproblemes 1 i 2 són simètriques, conseqüència lògica del fet que la matriu de costos és simètrica. ■

Apèndixs

A. Conjunts convexes

A.1 Elements

Recta

$$\{\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2); \lambda \in \mathbb{R}; \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n\} \quad (9.3)$$

Segment

$$\{\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2); 0 \leq \lambda \leq 1; \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n\} \quad (9.4)$$

Conjunt afí Γ és afí si:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Gamma \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in \Gamma \quad (9.5)$$

Conjunt convex Γ és convex si:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Gamma \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in \Gamma \quad (9.6)$$

Combinació convexa Un punt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ és una combinació convexa dels punts $\boldsymbol{x}_1, \cdots \boldsymbol{x}_m \in \mathbb{R}^n$ si existeixen les constants $\lambda_1, \cdots \lambda_m \geq 0$, $\lambda_1 + \cdots \lambda_m = 1$ tals que:

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots \lambda_m \boldsymbol{x}_m$$

Vèrtex o extrem Un punt $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ és un vèrtex de Γ si no és possible trobar $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Gamma, 0 \leq \lambda \leq 1$ tals que $x = \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2$.

Envolupant convexa (*convex hull*) $\operatorname{Conv}\Gamma$ d'un conjunt arbitrari Γ és el conjunt de totes les combinacions convexes de punts de Γ:

$$\operatorname{Conv}\Gamma = \{\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots \lambda_m \boldsymbol{x}_m \,|\, \boldsymbol{x}_i, \in \Gamma; \\ \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \cdots \lambda_m = 1\}$$

Semiespai obert

$$\{\boldsymbol{x} \,|\, \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} < \alpha; \mathbf{c}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; \alpha \in \mathbb{R}\} \quad (9.7)$$

Es diu tancat si és $\leq$.

Hiperplà És el conjunt:

$$\{\boldsymbol{x} \,|\, \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \alpha;\ \mathbf{c}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; \alpha \in \mathbb{R}\} \quad (9.8)$$

Si expressem l'equació (9.8) com:

$$\{\boldsymbol{x} \,|\, \mathbf{c}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0;\ \mathbf{c}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_0 = \alpha\}$$

l'hiperplà es pot interpretar geomètricament com el conjunt de vectors amb origen $\boldsymbol{x}_0$ normals al vector $\mathbf{c}$.

Subespai Γ és un subespai si:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Gamma \\ a, b \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow a \boldsymbol{x}_1 + b \boldsymbol{x}_2 \in \Gamma \quad (9.9)$$

Polítops i políedres Un polítop $\mathcal{P}$ és un conjunt de $\mathbb{R}^n$ intersecció d'un número finit de semiespais tancats i hiperplans:

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x}\,|\,\mathbf{a}_j^T\boldsymbol{x} \le b_j,\ j = 1,\cdots n;\ \mathbf{c}_j^T\boldsymbol{x} = d_j, j = 1,\cdots p;\ \boldsymbol{x},\ \mathbf{a}_j,\ \mathbf{c}_j, \in \mathbb{R}^n\}$$

Si el polítop és acotat s'anomena políedre. Ambdós son convexes. Per exemple, la figura 9.4 mostra el políedre:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

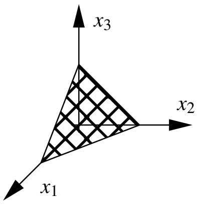


Figura 9.4: Políedre $x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_i \ge 0$

Símplex Siguin $m+1$ punts diferents: $\boldsymbol{x}_0, \cdots \boldsymbol{x}_m \in \mathbb{R}^n$. El conjunt Γ de totes les combinacions convexes d'aquests punts s'anomena símplex amb vèrtexs $\boldsymbol{x}_i$:

$$\Gamma = \{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \boldsymbol{x}_i;\ 0 \le \lambda_i \le 1;\ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1\}$$

A.2 Operacions amb conjunts convexes

Suma

$$\Gamma + \Lambda = \{z\,|\,z = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \in \Gamma, \boldsymbol{y} \in \Lambda\}$$

Notar que:

$$\Gamma - \Lambda = \{z\,|\,z = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \in \Gamma, \boldsymbol{y} \in \Lambda\}$$

Producte per un escalar

$$\lambda\Gamma = \{z\,|\,z = \lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \Gamma\}$$

A.3 Teoremes sobre conjunts convexes

Teorema A.3.1 Operacions amb conjunts convexes
Les següents operacions amb conjunts convexes, donen lloc a un conjunt convex:

- Suma $\Gamma + \Lambda$
- Diferència $\Gamma - \Lambda$
- Producte per un escalar $\lambda\Gamma$
- Translació $\boldsymbol{x} + \Gamma$
- Combinació lineal $\lambda\Gamma + \mu\Lambda$

Teorema A.3.2 Separació de conjunts convexes
Un hiperplà $\{\boldsymbol{x}\,|\,\mathbf{c}^T\boldsymbol{x} = \alpha\}$ separa dos conjunts Γ, Λ si

$$\boldsymbol{x} \in \Gamma \Rightarrow \mathbf{c}^T\boldsymbol{x} \le \alpha$$
$$\boldsymbol{x} \in \Lambda \Rightarrow \mathbf{c}^T\boldsymbol{x} \ge \alpha$$

Si les desigualtats son $<, >$, es diu que l'hiperplà separa estrictament els conjunts.

Si Γ, Λ son dos conjunts convexes no buits, existeix un hiperplà que els separa.

Teorema A.3.3 Hiperplà suport
Donat un conjunt convex Γ, es diu hiperplà suport de Γ a l'hiperplà que té intersecció no buida amb Γ tal que Γ està contingut en un dels semiespais determinats per l'hiperplà.

Si Γ és un conjunt convex compacte (tancat i acotat), aleshores qualsevol hiperplà suport de Γ té almenys un punt extrem de Γ.

Teorema A.3.4 Intersecció de conjunts convexes
Si $\Gamma_i, i \in I$ és una família de conjunts convexes en $\mathbb{R}^n$, $\bigcap_{i\in I} \Gamma_i$ és un conjunt convex.

Teorema A.3.5 Combinació convexa de punts
Si Γ és un conjunt convex, aleshores qualsevol combinació convexa de m punts de Γ pertany a Γ.

Teorema A.3.6 Teorema de Caratheodory
Sigui un conjunt arbitrari $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, aleshores, qualsevol punt $x \in \Gamma$ es pot expressar com a la combinació convexa de $n+1$ punts de Γ.

A.4 Funcions convexes

Sigui Γ un conjunt convex de $\mathbb{R}^n$ i f una funció definida sobre Γ. Es diu que f és convex si:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Gamma \\ 0 \le \lambda \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$f(\lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2) \le \lambda f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}_2)$$

Si la desigualtat és $<$, es diu estrictament convexa.

Teorema A.4.1 Epigràfic d'una funció convexa
Perquè una funció f definida sobre un conjunt convex Γ de $\mathbb{R}^n$ sigui convexa, és necessari i suficient que el seu epigràfic (veure la figura 9.5):

$$\textbf{epi}\, f = \{(\boldsymbol{x}, y)\,|\,\boldsymbol{x} \in \Gamma, y \ge f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \qquad (9.10)$$

sigui un conjunt convex de $\mathbb{R}^{n+1}$. Notar que $\{(\boldsymbol{x},y)\,|\,\boldsymbol{x}\in\Gamma, y=f(x)\}$ és el gràfic de la funció $f(x)$. L'epigràfic és el conjunt de punts que queda per sobre del gràfic.

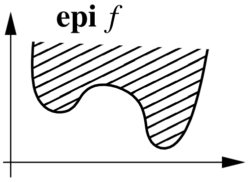


Figura 9.5: Epigràfic d'una funció.

Una funció f definida sobre un conjunt convex Γ es còncava si $-f$ és convexa. En aquest cas, l'hipogràfic, definit com $\{(\boldsymbol{x},y)\,|\,\boldsymbol{x}\in\Gamma, y\leq f(x)\}$ és un conjunt convex.

Podem considerar, doncs, l'epigràfic com el nexe d'unió entre els conjunts convexes i les funcions convexes: Les funcions convexes son aquelles en les que el seu epigràfic és un conjunt convex.

A.5 Funcions còncaves

Sigui Γ un conjunt convex de $\mathbb{R}^n$ i f una funció definida sobre Γ. Es diu que f és còncava si:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\Gamma\\ 0\leq\lambda\leq 1\end{array}\right\}\Rightarrow$$
$$f(\lambda\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2)\geq\lambda f(\boldsymbol{x}_1)+(1-\lambda)f(\boldsymbol{x}_2)$$

Si la desigualtat és $>$, es diu estrictament còncava. Si f és convexa, $-f$ és còncava.

A.6 Operacions amb funcions convexes

- Tota combinació lineal amb coeficients positius de funcions convexes és convexa.

- Si f_1 i f_2 son convexes i f_2 és no decreixent, aleshores $f_1\cdot f_2$ és convexa.

- El superior d'una família finita de funcions convexes és una funció convexa.

- Si f_i és una successió de funcions convexes que convergeixen a una funció límit f, aleshores f és convexa.

A.7 Continuïtat i derivabilitat de funcions convexes

- Una funció convexa f és contínua en tots els punts interiors a l'interval on està definida.

- Perquè una funció derivable en un interval I sigui convexa, és necessari i suficient que la derivada f' sigui creixent en I.

- Si una funció f definida i dues vegades derivable en un interval I és positiva o nul·la en I, aleshores f és convexa.

Bibliografia

[1] David G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Springer, segona edició, 2005.

[2] Rafael Infante Macías. *Métodos de programación matemática, Tomo I*. Ediciones UNED, segona edició, 1997.

[3] Wayne L. Winston. *Operations Research Applications and Algorithms*. Wadsworth Publishing Company, tercera edició.