Apunts de funcions de vàries variables

Llorenç Cerdà-Alabern
llorenc@ac.upc.edu
Barcelona, agost de 2015.

Índex

Prefaci

Vaig escriure aquests apunts mentre preparava l'assignatura *Funciones de varias Variables II* del curs 2014-15 del grau de matemàtiques de la UNED. Els apunts estan basats fonamentalment en el llibre de l'assignatura [1]. El contingut no és rigorós ni complert, i només hi ha demostracions senzilles orientades a entendre o ajudar a memoritzar les relacions que demostren. L'edició l'he fet amb LaTeX.

Capítol 1
Vectors

Desigualtat Cauchy-Schwarz

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \le \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\| \tag{1.1}$$

Desigualtat triangular

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 \le (\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2 \tag{1.2}$$

Producte Vectorial

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

1. $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\,\sin\theta$

2. $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ és ortogonal a $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ i segueix la regla de la ma dreta.

Equació del pla que passa per (x_0,y_0,z_0) i és ortogonal a $\boldsymbol{n} = A\,\boldsymbol{i} + B\,\boldsymbol{j} + C\,\boldsymbol{k}$:

$$A\,(x-x_0) + B\,(y-y_0) + C\,(z-z_0) = 0 \Rightarrow \\ A\,x + B\,y + C\,z + D = 0 \tag{1.4}$$

on $D = -A\,x_0 - B\,y_0 - C\,z_0$.

Distància d'un punt (x_0,y_0,z_0) a un pla $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$:

$$\text{Distància} = \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{1.5}$$

Coordenades cilíndriques:

$$x = r\,\cos\theta \tag{1.6}$$
$$y = r\,\sin\theta \tag{1.7}$$
$$z = z \tag{1.8}$$

Coordenades esfèriques:

$$x = \rho\,\sin\phi\,\cos\theta \tag{1.9}$$
$$y = \rho\,\sin\phi\,\sin\theta \tag{1.10}$$
$$y = \rho\,\cos\phi \tag{1.11}$$

Capítol 2
Diferenciació

Gràfica d'una funció $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\text{gràfica d'}f = \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} | \boldsymbol{x} \in U\} \tag{2.1}$$

Límit d'una funció $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en un punt $\boldsymbol{x}_0 \in \{A \cup \text{fr}(A)\}$, on A és un conjunt obert. Sigui N un entorn del punt $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Es diu que f finalitza en N quan $\boldsymbol{x}$ tendeix a $\boldsymbol{x}_0$ si existeix un entorn U de $\boldsymbol{x}_0$ tal que $\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x} \in U$ i $\boldsymbol{x} \in A$ implica $f(\boldsymbol{x}) \in N$. Es diu que f tendeix a $\boldsymbol{b}$ quan $\boldsymbol{x}$ tendeix a $\boldsymbol{x}_0$

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \tag{2.2}$$

si per a qualsevol entorn N de $\boldsymbol{b}$ f finalitza en N quan $\boldsymbol{x}$ tendeix a $\boldsymbol{x}_0$.

Continuïtat d'una funció $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: f és continua en $\boldsymbol{x}_0$ si i només si:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) \tag{2.3}$$

Derivada d'una funció $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en un punt $\boldsymbol{x}_0$

$$\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Millor aproximació lineal d'una funció $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en un entorn $\boldsymbol{x} \in B$ del punt $\boldsymbol{x}_0$

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}_0)\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \tag{2.5}$$

Diferenciabilitat d'una funció $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en un entorn del punt $\boldsymbol{x}_0$: Si les derivades parcials existeixen i:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}_0)\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} = 0 \tag{2.6}$$

Teorema 2.1 Diferenciabilitat implica continuïtat sigui $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $\boldsymbol{x}_0 \in A$. Aleshores f és contínua en $\boldsymbol{x}_0$.

Teorema 2.2 Continuïtat de les derivades parcials implica Diferenciabilitat
Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ amb derivades parcials contínues en un entorn de $\boldsymbol{x}_0 \in A$. Aleshores f és diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$.

Teorema 2.3 Regla de la cadena
Siguin $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $g : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ amb g diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$ i f en $\boldsymbol{y}_0 = g(\boldsymbol{x}_0)$. Aleshores, la composició $f \circ g$ és diferenciable en $\boldsymbol{x}_0$ amb:

$$\boldsymbol{D}(f \circ g)(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{y}_0)\,\boldsymbol{D}g(\boldsymbol{x}_0) \tag{2.7}$$

Gradient Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable en un punt $\boldsymbol{x}_0$. La derivada $\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}_0)$ s'anomena gradient de f en $\boldsymbol{x}_0$ i s'escriu:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Casos particulars de la regla de la cadena

1. Sigui $\boldsymbol{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{c}(t) = (x(t),y(t),z(t))$ una trajectòria i $h(t) = f(\boldsymbol{c}(t)) = f(x(t),y(t),z(t))$, on $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Aleshores:
$$\frac{dh}{dt} = \nabla f(\boldsymbol{c}(t)) \cdot \boldsymbol{c}'(t) \tag{2.9}$$
2. Sigui $h(x,y,z) = f(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z)) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, aleshores:
$$\boldsymbol{D}h(x,y,z) = \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{y}_0)\,\boldsymbol{D}g(\boldsymbol{x}_0) =$$
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Derivada direccional de $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en la direcció del vector $\boldsymbol{v}$:

$$\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x}_0 + t\,\boldsymbol{v})\Big|_{t=0} = \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{v} = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{v} \tag{2.11}$$

D'on es té que ∇f és un vector que apunta en la direcció de màxim creixement de f. A més, és un vector ortogonal a la superfícies de nivell de f. Per tant, l'equació del plànol tangent a f en $\boldsymbol{x}_0$ és:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \tag{2.12}$$

Matriu Hessiana de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{H}f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Forma quadràtica Hessiana de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{H}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{h}\,\boldsymbol{H}f(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \tag{2.14}$$

on $\boldsymbol{h} = (h_1, \cdots, h_n)$

Teorema 2.4 Criteri Hessià per els punts extrems
Sigui $f : R^n \to \mathbb{R}$ diferenciable C^3 en un punt crític $\boldsymbol{x}_0$. Aleshores, si $\boldsymbol{H}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h})$ és definida positiva $\boldsymbol{x}_0$ és un punt mínim relatiu de f, si és definida negativa, aleshores $\boldsymbol{x}_0$ és un punt màxim relatiu.

Criteri del determinants per a formes quadràtiques
Una forma quadràtica ($\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$) és definida positiva si i només si cada autovalor de $\boldsymbol{A}$ és positiu. Una matriu Hermítica $\boldsymbol{A}$ és definida positiva si tots els menors principals superior esquerra d'$\boldsymbol{A}$ són positius. Anàlogament, $\boldsymbol{A}$ és definida negativa si tots els autovalors són negatius, que implica que els menors principals han de tenir signes alterns (començant amb signe $-$). Si tots els determinants són $\neq 0$ i no es compleixen les condicions anteriors, aleshores és un punt de sella.

Teorema de Taylor per a una variable de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \cdots$$
$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + R_k(x_0,h) \tag{2.15}$$

on

$$R_k(x_0,h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - \tau)^k}{k!} f^{(k+1)}(\tau)\,d\tau \tag{2.16}$$

Fórmula de Taylor de primer ordre per a funcions de varies variables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} + R_1(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{h}) \quad (2.17)$$

on $\boldsymbol{h} = (h_1, \cdots, h_n)$

Fórmula de Taylor de segon ordre per a funcions de varies variables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{H}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h})+R_2(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{h}) \quad (2.18)$$

on $\boldsymbol{h} = (h_1, \cdots, h_n)$

Multiplicadors de Lagrange Sigui $f(\boldsymbol{x}) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ subjecta a una superfície S donada per:

$$\begin{aligned} g_1(\boldsymbol{x}) &= c_1 \\ &\cdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) &= c_k \end{aligned} \quad (2.19)$$

Aleshores un punt extrem $\boldsymbol{x}_0$ de f sobre S satisfà:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) - \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = 0 \quad (2.20)$$

Hessià Orlat Sigui $f(\boldsymbol{x}) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ subjecta a $g(\boldsymbol{x}) = c$. Aleshores, si $\boldsymbol{H}h(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h})$ és definida positiva $\boldsymbol{x}_0$ és un punt mínim relatiu de $f|g$, si és definida negativa, aleshores $\boldsymbol{x}_0$ és un punt màxim relatiu, on $h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \lambda\, g(\boldsymbol{x})$ i:

$$\boldsymbol{H}h(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x_1} & -\frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & -\frac{\partial g}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & -\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_n\,\partial x_2} & \cdots & -\frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Notar que $\frac{\partial^2 h}{\partial\lambda\,\partial x_1} = -\frac{\partial g}{\partial x_1}$.

Teorema 2.5 De la funció implícita
Sigui $F(\boldsymbol{x}, z) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ amb derivades parcials contínues i:

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}_0, z_0) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0, z_0) &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

aleshores hi ha un entorn U de $\boldsymbol{x}_0$ i V de z_0 en els que existeix una única funció $z = g(\boldsymbol{x})$ definida per $\boldsymbol{x} \in U$ i $z \in V$ tal que

$$F(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) = 0.$$

Generalització per a aïllar m variables de m equacions:

$$\begin{aligned} F_1(\boldsymbol{x}, z_1, z_2 \cdots, z_m) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(\boldsymbol{x}, z_1, z_2 \cdots, z_m) &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

aleshores si el determinant Δ de

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

és $\Delta \neq 0$, aleshores és possible trobar de manera única les funcions:

$$z_i = g_i(\boldsymbol{x}),\ i = 1, \cdots, m \quad (2.25)$$

Teorema 2.6 De la funció inversa
Sigui $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(\boldsymbol{x}) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

on $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$. En aquest cas el determinant de $\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}_0)$ es diu **determinant Jacobià $\boldsymbol{J}f(\boldsymbol{x}_0)$:**

$$\boldsymbol{J}f(\boldsymbol{x}_0) = |\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}_0)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{vmatrix} \quad (2.27)$$

Si $\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}_0)$ és continua i $\boldsymbol{J}f(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, aleshores existeix de forma única $\boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{y})$ per a $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ en un entorn de $\boldsymbol{x}_0$ i $\boldsymbol{y}_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$, respectivament.

Capítol 3

Funcions vectorials

Trajectòria en $\mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{c}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{c}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \quad (3.1)$$

Vector velocitat

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{c}'(t) = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

i velocitat $v(t) = |\boldsymbol{v}(t)|$. Notar que el vector velocitat $\boldsymbol{v}(t)$ és tangent a la trajectòria $\boldsymbol{c}(t)$. L'acceleració és $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{v}'(t)$.

Longitud d'arc

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{c}) = \int_{t_1}^{t_2} |\boldsymbol{c}'(t)|\, dt = \\ \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt \end{aligned} \quad (3.3)$$

Recta tangent $\boldsymbol{l}(t)$ a la trajectòria $\boldsymbol{c}(t)$ en el punt $t = t_0$:

$$\boldsymbol{l}(t) = \boldsymbol{c}(t_0) + (t - t_0)\,\boldsymbol{c}'(t_0) \tag{3.4}$$

Camp vectorial $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Camp vectorial gradient $\boldsymbol{F} = \nabla f$.

Línies de flux d'un camp $\boldsymbol{F}$ són trajectòries tals que $\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{F}(c(t))$. És a dir, $\boldsymbol{F}$ és el camp de velocitats de $\boldsymbol{c}(t)$.

Divergència És el producte escalar de l'operador $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ i el camp $\boldsymbol{F}$:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} \tag{3.5}$$

i és una mesura de l'expansió $\operatorname{div}\boldsymbol{F} > 0$ o compressió $\operatorname{div}\boldsymbol{F} < 0$ per unitat de volum d'$\boldsymbol{F}$.

Rotacional És el producte vectorial de l'operador $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ i el camp $\boldsymbol{F}$:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

i és una mesura de la velocitat angular que tendria un sòlid que rotés tal com ho fa el camp en el voltant del punt.

Laplacià

$$\nabla^2 = \nabla(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{3.7}$$

Teorema 3.1 Un camp gradient és irrotacional

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \tag{3.8}$$

Teorema 3.2 El rotacional té divergència 0

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0 \tag{3.9}$$

Capítol 4

Integrals múltiples

Teorema 4.1 Fubini

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dx\,dy = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)dy\,dx = \iint_B f(x,y)\,dA \tag{4.1}$$

Regions elementals Sigui $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, h(x) \le y \le g(x)\}$, on $a < b$ i $h(t) \le g(t)$ per $t \in [a,b]$, aleshores B es diu **y-simple** (veure la figura 4.1 (a)) i:

$$\iint_B f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy\,dx \tag{4.2}$$

Anàlogament, si $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le y \le b, h(y) \le x \le g(y)\}$, on $a < b$ i $h(t) \le g(t)$ per $t \in [a,b]$, aleshores B es diu **x-simple** (veure la figura 4.1 (b)):

$$\iint_B f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)\,dx\,dy \tag{4.3}$$

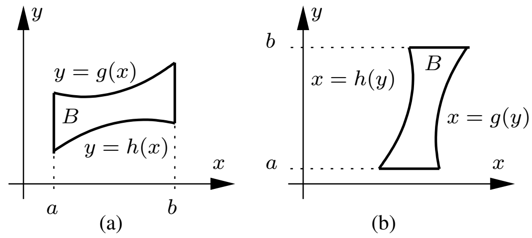

Figura 4.1: Regions elementals.

Aplicació injectiva $T : D^* \to D$ en D^* si $\forall(u,v) \in D^*$, $T(u,v) = T(u',v')$ implica $u = u'$, $v = v'$. És a dir, no fa correspondre diferents elements del domini D^* en un mateix element del codomini D.

Aplicació sobrejectiva (*surjective*) $T : D^* \to D$ en D si $\forall(u',v') \in D\,\exists\,(u,v) \in D^* \mid (u',v') = T(u,v)$. És a dir, la imatge de T, $T(D^*)$, és igual al seu codomini D: $T(D^*) = D$.

Una aplicació lineal donada per la multiplicació per una matriu A és injectiva i sobrejectiva sii $\det A \neq 0$.

Teorema 4.2 Canvi de variables
Siguin D i D^* dues regions elementals amb $\boldsymbol{y} = G(\boldsymbol{x}) : D \subset \mathbb{R}^n \to D^* \subset \mathbb{R}^n$, on

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(\boldsymbol{x}) \\ &\vdots \\ y_n &= g_n(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{4.4}$$

i $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, tal que G és injectiva en D i sobrejectiva en D^*, $G(D^*) = D$ i amb Jacobià $JG(\boldsymbol{x}) \neq 0$, $\boldsymbol{x} \in D$ (veure 2.27, pàg. 3). Aleshores existeix la funció inversa $\boldsymbol{x} = T(\boldsymbol{y}) : D^* \subset \mathbb{R}^n \to D \subset \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1(\boldsymbol{y}) \\ &\vdots \\ x_n &= t_n(\boldsymbol{y}) \end{aligned} \tag{4.5}$$

i:

$$\int_D f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{D^*} f(T(\boldsymbol{y}))\, |\boldsymbol{J}T(\boldsymbol{y})|\, d\boldsymbol{y} \tag{4.6}$$

Notar també: $\boldsymbol{J}T(\boldsymbol{y}) = 1/\boldsymbol{J}G(\boldsymbol{x}) \circ T = 1/\boldsymbol{J}G(T(\boldsymbol{y}))$.

Coordenades polars:

$$x = r\,\cos\theta \tag{4.7}$$
$$y = r\,\sin\theta \tag{4.8}$$
$$|\boldsymbol{J}T(r,\theta)| = r \tag{4.9}$$

Coordenades cilíndriques:

$$x = r\,\cos\theta \tag{4.10}$$
$$y = r\,\sin\theta \tag{4.11}$$
$$z = z \tag{4.12}$$
$$|\boldsymbol{J}T(r,\theta,z)| = r \tag{4.13}$$

Coordenades esfèriques:

$$x = \rho\,\sin\phi\,\cos\theta \tag{4.14}$$
$$y = \rho\,\sin\phi\,\sin\theta \tag{4.15}$$
$$y = \rho\,\cos\phi \tag{4.16}$$
$$|\boldsymbol{J}T(\rho,\theta,\phi)| = \rho^2\,\sin\phi \tag{4.17}$$

Integral de línia d'un camp escalar (integral sobre una trajectòria) (*line integral*)

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(\boldsymbol{c}(t))\, |\boldsymbol{c}'(t)|\, dt \tag{4.18}$$

Si $f = 1$ la integral (4.18) és la longitud de la trajectòria (o arc) C. Notar que $ds = |\boldsymbol{c}'(t)|\, dt$ és un diferencial d'arc (veure 3.3, pàg. 3).

Curvatura $\kappa(p)$ en $p \in C$:

$$\kappa(p) = |\boldsymbol{c}''(t)|,\, p = \boldsymbol{c}(t) \tag{4.19}$$

Si C és una corba plana tancada:

$$\int_C \kappa\, d\boldsymbol{s} \geq 2\,\pi \tag{4.20}$$

només igual a $2\,\pi$ si C és una circumferència.

Integral de línia d'un camp vectorial

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t))\cdot\boldsymbol{c}'(t)\, dt \tag{4.21}$$

Notar que l'equació (4.21) és orientada (canvia de signe al canviar l'ordre dels extrems), mentre l'equació (4.18) no ho és ($|\boldsymbol{c}'(t)|$ és sempre positiu).

Observacions

1. Notar que $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{c}'(t)\, dt$ és un vector tangent a la trajectòria (anomenat **vector desplaçament**). Per tant, si $\boldsymbol{F}$ és el vector força, $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$ és el treball per a realitzar un desplaçament $d\boldsymbol{s}$, i la integral (4.18) és el treball realitzat per el camp de forces $\boldsymbol{F}$ per a realitzar el desplaçament de la trajectòria C.

2. Notar que $\boldsymbol{T}(t) = \boldsymbol{c}'(t)/\|\boldsymbol{c}'(t)\|$ és el vector tangent unitari. Per tant:

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t))\cdot\boldsymbol{c}'(t)\, dt = \\ \int_a^b (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t))\cdot\boldsymbol{T}(t))\, \|\boldsymbol{c}'(t)\|\, dt\end{aligned} \tag{4.22}$$

3. Amb la parametrització $\boldsymbol{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, també es pot posar:

$$d\boldsymbol{s} = \frac{\partial x(t)}{\partial t}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y(t)}{\partial t}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z(t)}{\partial t}\boldsymbol{k} \tag{4.23}$$

i:

$$\begin{aligned}&\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \\ &\int_a^b \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t}\, F_1(t) + \frac{\partial y(t)}{\partial t}\, F_2(t) + \frac{\partial z(t)}{\partial t}\, F_3(t)\right)\, dt\end{aligned} \tag{4.24}$$

on $\boldsymbol{F} = (F_1, F2, F3)$, $F_i(t) = F_i(x(t), y(t), z(t))$

Integral de línia d'un camp gradient

$$\int_C \nabla f\cdot d\boldsymbol{s} = f(\boldsymbol{c}(b)) - f(\boldsymbol{c}(a)) \tag{4.25}$$

Corba simple és la imatge d'una aplicació $\boldsymbol{c} : l \to \mathbb{R}^3$ injectiva en un interval l. És a dir, una corba simple no es talla a ella mateixa. Si els extrems coincideixen, es diu **corba tancada simple**.

Superfície parametritzada $\boldsymbol{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{\Phi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \tag{4.26}$$

Vectors tangents a superfície parametritzada Mantenint constant u i v de $\boldsymbol{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donada per l'equació (4.26), respectivament, s'obtenen els vectors tangents en el punt (u_0,v_0):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_v &= \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u_0,v_0) = \boldsymbol{i}\frac{\partial x}{\partial v} + \boldsymbol{j}\frac{\partial y}{\partial v} + \boldsymbol{k}\frac{\partial z}{\partial v}\bigg|_{(u_0,v_0)} \\ \boldsymbol{T}_u &= \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(u_0,v_0) = \boldsymbol{i}\frac{\partial x}{\partial u} + \boldsymbol{j}\frac{\partial y}{\partial u} + \boldsymbol{k}\frac{\partial z}{\partial u}\bigg|_{(u_0,v_0)}\end{aligned} \tag{4.27}$$

Plànol tangent a una superfície parametritzada Si $\boldsymbol{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donada per l'equació (4.26), amb vectors tangents donats per l'equació (4.27) té $\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v \neq 0$, es diu que la superfície és regular i:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v = \boldsymbol{i}\, n_1 + \boldsymbol{j}\, n_2 + \boldsymbol{k}\, n_3 \tag{4.28}$$

amb plànol tangent:

$$n_1\,(x - x_0) + n_2\,(y - y_0) + n_3\,(z - z_0) = 0 \tag{4.29}$$

Àrea d'una superfície parametritzada $\boldsymbol{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donada per l'equació (4.26), amb vectors tangents donats per l'equació (4.27) té una àrea:

$$A(S) = \iint_D \|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\|\, du\, dv \tag{4.30}$$

En una esfera de radi R:

$$\|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\|\, d\phi\, d\theta = R^2\, sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

Superfície expressada com una àrea $z = g(x.y)$. Es pot fer la parametrització:

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= g(u,v) \end{aligned} \tag{4.31}$$

d'on:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}(x,y) &= (x, y, g(x,y)) \\ \boldsymbol{T}_x &= \boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{T}_y &= \boldsymbol{j} + \frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{T}_x \times \boldsymbol{T}_y &= -\frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{4.32}$$

i

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dx\, dy \tag{4.33}$$

Àrea d'una superfície de revolució al girar $f(x)$ al voltant de l'eix x o y. Amb la parametrització:

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= f(u)\, \cos(v) \\ z &= f(u)\, \sin(v) \end{aligned} \tag{4.34}$$

amb $a \leq u \leq b$, $0 \leq v \leq 2\pi$ s'obté, respectivament:

$$\begin{aligned} A &= 2\,\pi \int_a^b |f(x)|\, \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \quad \text{(gir eix } x\text{)} \\ A &= 2\,\pi \int_a^b |x|\, \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \quad \text{(gir eix } y\text{)} \end{aligned} \tag{4.35}$$

Integral d'una funció escalar sobre una superfície $\boldsymbol{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donada per l'equació (4.26), amb vectors tangents donats per l'equació (4.27) té una àrea:

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(\boldsymbol{\Phi}(u,v))\, \|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\|\, du\, dv \tag{4.36}$$

on $dS = \|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\|\, du\, dv$. Sobre una gràfica (4.31):

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_S f(x,y,g(x,y))\, \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dx\, dy \tag{4.37}$$

Integral d'una funció vectorial sobre una superfície $\boldsymbol{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donada per l'equació (4.26), amb vectors tangents donats per l'equació (4.27):

$$\iint_{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v)\, du\, dv \tag{4.38}$$

on

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\, du\, dv = \frac{\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v}{\|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\|}\, \|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\|\, du\, dv = \boldsymbol{n}\, dS$$

Orientació La normal a la superfície és:

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\Phi}(u,v)) = \pm \frac{\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v}{\|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\|} \tag{4.39}$$

Es diu que $\boldsymbol{\Phi}$ conserva l'orientació si és $+$. Sobre una gràfica (4.31):

$$\boldsymbol{n} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}} \tag{4.40}$$

Teorema 4.3 La integral de $\boldsymbol{F}$ sobre S és igual a la integral de la component normal de vF sobre S

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{4.41}$$

Demostració.

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v)\, du\, dv$$
$$\iint_D \boldsymbol{F} \cdot \frac{\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v}{\|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\|}\, \|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v)\|\, du\, dv =$$
$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_S f\, dS$$

of $f = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$. □

Sobre una gràfica (4.31), si $\boldsymbol{F} = F_1\,\boldsymbol{i} + F_s\,\boldsymbol{j} + F_3\,\boldsymbol{k}$:

$$\begin{aligned} &\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} \iint_D \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v)\,dx\,dy \\ &\iint_D \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\,F_1 - \frac{\partial g}{\partial y}\,F_2 + F_3\right)\,dx\,dy \end{aligned} \tag{4.42}$$

Capítol 5

Teoremes d'integració vectorial

Teorema 5.1 Teorema de Green
Siguin $P : D \subset \mathbb{R}^2 \to R$, $Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to R$ funcions de classe C^1, on D és una regió simple i C és la seva frontera. Aleshores:

$$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy \tag{5.1}$$

on el camí d'integració de C és el contrari a les agulles del rellotge (orientació positiva).

Fórmula de Green per calcular àrees

$$A = \iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx \tag{5.2}$$

on $C = \operatorname{fr} D$.

Forma vectorial del teorema de Green amb el rotacional Sigui $\boldsymbol{F} = P\,\boldsymbol{i} + Q\,\boldsymbol{j}$. $(\operatorname{rot}\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, per tant:

$$\begin{aligned} \iint_D (\operatorname{rot}\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{k}\,dx\,dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy = \\ &\oint_{\operatorname{fr} D} (P\,dx + Q\,dy) = \oint_{\operatorname{fr} D} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} \end{aligned} \tag{5.3}$$

on $d\boldsymbol{s} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j}$.

Forma vectorial del teorema de Green amb la divergència Sigui el camp $\boldsymbol{F} = P\,\boldsymbol{i} + Q\,\boldsymbol{j}$ i la corba $\boldsymbol{c}(t) = (x(t), y(t))$ una parametrització de $\operatorname{fr} D$, on $D \subset \mathbb{R}^2$. Notar que $\boldsymbol{c}'(t) = (x'(t), y'(t))$ és un vector tangent a la corba $\boldsymbol{c}(t)$. Sigui $\boldsymbol{n}(t) = (n_1(t), n_2(t))$ el vector normal unitari exterior a $c(t)$ (veure la figura 5.1). Aleshores:

$$\iint_D \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dA = \oint_{\operatorname{fr} D} (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\,ds \tag{5.4}$$

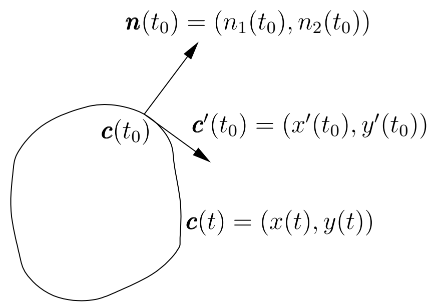

Figura 5.1: Vector normal a una trajectòria en el plànol.

Demostració. Com que ha de ser $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c} = n_1\,x' + n_2\,y' = 0$, tenim que $n_1 = k\,y'$, $n_2 = -k\,x'$. Normalitzant:

$$\boldsymbol{n}(t) = \frac{y'(t)\,\boldsymbol{i} - x'(t)\,\boldsymbol{j}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \tag{5.5}$$

Per tant:

$$\begin{aligned} &\oint_{\operatorname{fr} D} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = \\ &\oint_{\operatorname{fr} D} \frac{P\,y'(t) - Q\,x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \\ &\oint_{\operatorname{fr} D} P\,dy - Q\,dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\,dx\,dy = \\ &\iint_D \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dA. \end{aligned} \tag{5.6}$$

□

Teorema 5.2 Teorema de Stokes
Sigui S una superfície definida per una funció de classe C^2 $z = f(x, y) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on es vàlid el teorema de Green i $\boldsymbol{F}$ un camp vectorial de classe C^1. Aleshores

$$\iint_S \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_{\operatorname{fr} S} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{S} &= \boldsymbol{T}_x \times \boldsymbol{T}_y\,dx\,dy = \boldsymbol{n}\,dS \\ \boldsymbol{\Phi}(x,y) &= (x, y, f(x,y)) \\ \boldsymbol{T}_x \times \boldsymbol{T}_y &= -\frac{\partial z}{\partial x}\,\boldsymbol{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \\ d\boldsymbol{s} &= \boldsymbol{p}'(t)\,dt = (x'(t), y'(t), z'(t))\,dt \end{aligned}$$

on $\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ és una parametrització de $\operatorname{fr} S$ en sentit contrari a les agulles del rellotge (orientació positiva).

En dues dimensions $\boldsymbol{T}_x \times \boldsymbol{T}_y = \boldsymbol{k}$, $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{k}\,dx\,dy$, per tant:

$$\iint_D \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k}\,dx\,dy = \oint_{\operatorname{fr} D} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{5.8}$$

que és l'equació (5.3).

Teorema 5.3 Teorema de la divergència de Gauss
Sigui W una regió elemental en l'espai i $\mathrm{fr}\, W$ la superfície tancada orientada que limita W. Sigui $\boldsymbol{F}$ un camp vectorial definit en W. Aleshores:

$$\iiint_W \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV = \iint_{\mathrm{fr}\, W} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\mathrm{fr}\, W} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})\, dS \tag{5.9}$$

En dues dimensions:

$$\iint_D \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dA = \oint_{\mathrm{fr}\, D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \oint_{\mathrm{fr}\, D} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})\, ds \tag{5.10}$$

que és l'equació (5.4).

Teorema 5.4 Cap vectorial conservatiu
Sigui $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un camp de classe C^1 excepte (pot ser) en un nombre finit de punts. Aleshores les següents condicions són equivalents:

1. Per a qualsevol corba tancada C: $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$.
2. Per a qualsevol corbes C_1, C_2 amb extrems iguals: $\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$.
3. $\boldsymbol{F}$ és el gradient d'alguna funció $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{F} = \nabla f$. A més: $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t)) \cdot \boldsymbol{c}'(t)\, dt = f(\boldsymbol{c}(b)) - f(\boldsymbol{c}(a))$.
4. $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$.

Teorema 5.5 Camp de divergència nul·la
Sigui $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un camp de classe C^1 en tots els punts, tal que $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$. Aleshores existeix un camp vectorial $\boldsymbol{G}$ de classe C^1 tal que $\boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{G}$.

Referències

[1] Jerrold Eldon Marsden i Anthony Tromba. *Cálculo Vectorial*. 5a ed. Addison Wesley, 2013.

Taula d'integrals

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad n \neq -1 \tag{5.11}$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| \tag{5.12}$$

$$\int u\ dv = uv - \int vdu \tag{5.13}$$

$$\int e^x\, dx = e^x \tag{5.14}$$

$$\int a^x\, dx = \frac{1}{\ln a} a^x \tag{5.15}$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x \tag{5.16}$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x \tag{5.17}$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x \tag{5.18}$$

$$\int \tan x\, dx = \ln |\sec x| \tag{5.19}$$

$$\int \sec x\, dx = \ln |\sec x + \tan x| \tag{5.20}$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x \tag{5.21}$$

$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x \tag{5.22}$$

$$\int \frac{a}{a^2 + x^2}\, dx = \tan^{-1} \frac{x}{a} \tag{5.23}$$

$$\int \frac{a}{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| \tag{5.24}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} \tag{5.25}$$

$$\int \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \sec^{-1} \frac{x}{a} \tag{5.26}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \cosh^{-1} \frac{x}{a} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \tag{5.27}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \tag{5.28}$$