Apunts de teoria de la decisió

Llorenç Cerdà-Alabern
llorenc@ac.upc.edu
Barcelona, 3 de setembre de 2013

Índex

Prefaci

Vaig escriure aquests apunts mentre preparava l'assignatura *teoría de la decisión* del curs 2012-13 de la carrera de matemàtiques de la UNED. Els apunts estan basats fonamentalment en el llibre de l'assignatura [2]. El contingut no és rigorós ni complert, i només hi ha demostracions senzilles orientades a entendre o ajudar a memoritzar les relacions que demostren. L'edició l'he fet amb LaTeX.

Capítol 1

Definició d'un problema de decisió

1.1 Introducció

Idea d'un problema de decisió: Decidir una **acció** de forma racional en funció d'uns **estats de la natura** (*states of the nature*).

Ingredients

- Conjunt discret $a_i \in A, i = 1, \cdots n$, o continu d'accions.
- Conjunt discret $\theta_i \in \Theta, i = 1, \cdots m$, o continu d'estats de la natura.
- Funció de pèrdua $L : \Theta \times A \to \mathbb{R}$ (o guany $G = -L$).

Representem un problema de decisió amb la tupla (A, Θ, L). Per a donar els valors de la funció de pèrdua o guany d'un problema de decisió amb conjunts discrets d'accions i estats de la natura, es fa servir una taula en el format que mostra la figura 1.1.

		Estat de la natura			
		θ_1	θ_2	$\cdots$	θ_m
Acció	a_1	$L(a_1,\theta_1)$	$L(a_1,\theta_2)$	$\cdots$	$L(a_1,\theta_m)$
	a_2	$L(a_2,\theta_1)$	$L(a_2,\theta_2)$	$\cdots$	$L(a_2,\theta_m)$
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	a_n	$L(a_n,\theta_1)$	$L(a_n,\theta_2)$	$\cdots$	$L(a_n,\theta_m)$

Figura 1.1: Representació estàndard d'un problema de decisió

Esquemes de decisió

- **Certesa**: el decisor coneix l'estat. Es redueix a un problema d'optimització (no es tracta en el curs).
- **Ambient de risc**: el decisor coneix la distribució (que anomenarem $\boldsymbol{\pi}(\theta)$) de l'estat de la natura θ. Nota: Farem servir negreta perquè, en general, la distribució pot ser un vector on cada component és la probabilitat de succeir respectivament cada estat de la natura. $L(a_i, \theta)$ són VAs (dependents de θ) amb

distribució $F_a(x|\theta) = P(L(a_i,\theta) \leq x)$ i mitjana:

$$\mu_{a_i} = \mathrm{E}_\theta[L(a_i,\theta)] = \int_\Theta L(a_i,\theta)\,\boldsymbol{\pi}(\mathrm{d}\theta)$$

Si $F_{a'} \leq F_a$, aleshores a **domina** a a'. És a dir, a és preferible doncs són més probables valors menors d'a que d'a'. Si no hi ha dominància, una solució senzilla és triar la de mitjana menor. Els diferents criteris s'analitzen en la secció 2.1, pàg. 4.

- **Incertesa**: no es coneix l'estat ni la seva distribució. Els diferents criteris s'analitzen en la secció 3.1, pàg. 6.
- **Amb experimentació o estadístic**: el decisor pot realitzar un conjunt d'observacions d'una VA $X \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ que depèn l'estat θ, amb distribució $F(X|\theta)$. El decisor ha de triar una **regla de decisió** $d : \mathcal{X} \to A$ (assigna una acció a cada possible X). Per avaluar la regla de decisió d definim la **funció de risc**:

$$R(d,\theta) = \mathrm{E}_X[L(d(X),\theta)] = \int_\mathcal{X} L(d(x),\theta)\,F(\mathrm{d}x|\theta)$$

que representa, per a cada estat de la natura θ, la pèrdua esperada al fer servir la regla de decisió $d(x)$.

Notar l'analogia entre un problema de decisió i un joc bipersonal de suma zero. Ara el primer jugador és el decisor, i el segon jugador l'estat de la natura. Si en comptes de pèrdues es fan servir guanys, la taula 1.1 seria una matriu de guanys, equivalent a la matriu de pagaments (*payoffs*) del joc. Per aquest motiu, en aquests apunts es fa servir la notació $L(a,\theta)$, en comptes de la notació $L(\theta,a)$ que es fa servir en [2], doncs el primer jugador (el decisor) juga files en la matriu de pagaments del joc (juga files en la matriu de pèrdues del problema de decisió). És a dir, la matriu de pagaments $M(i,j)$ d'un joc de suma zero és ara la matriu $L(i,j)$ del problema de decisió.

1.2 Esquemes de decisió aleatoritzats

Les accions $a \in A$ es trien amb una distribució $\boldsymbol{\alpha}$. Nota: Farem servir negreta perquè, en general, la distribució pot ser un vector on cada component és la probabilitat de triar cada possible acció. Ara la funció de pèrdua, per a cada estat de la natura, és:

$$L(\boldsymbol{\alpha},\theta) = \int_A L(a,\theta)\,\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{d}a)$$

Designem amb A^* l'espai de totes les accions aleatoritzades d'A.

Decisió aleatoritzada amb experimentació Les decisions $d : \mathcal{X} \to A$ es prenen amb una distribució δ. Ara el risc, per a cada estat de la natura, és:

$$R(\delta,\theta) = \int_\mathcal{D} R(d,\theta)\,\delta(\mathrm{d}d)$$

Un procediment alternatiu, equivalent a l'anterior, és definir una **regla de comportament** $\gamma : \mathcal{X} \to A^*$. Són equivalents en el sentit que donada una decisió aleatoritzada δ, sempre és possible trobar una regla de comportament γ tal que $R(\delta,\theta) = R(\gamma,\theta)$.

1.3 Teoria de la utilitat

Farem servir una **utilitat** per valorar les decisions de les accions davant els estats de la naturalesa.

Loteria (*lottery*) Representem un conjunt de premis (*prizes*) $P_i \in \mathcal{P}$ i probabilitats d'assolir-los $p_i, i = 1,\cdots n$, $\sum_i p_i = 1$, en la forma:

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Farem servir la notació $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix} = P_i$. És a dir, la loteria $\boldsymbol{p} = P_i$ correspon a rebre el premi P_i amb probabilitat 1. Denotarem per $\mathcal{P}^*$ el **conjunt de totes les possibles loteries** definides sobre el mateix conjunt de premis P_i. Donats $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$, un conjunt de loteries $\boldsymbol{p}_i \in \mathcal{P}^*, i = 1,\cdots k$ satisfà:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \boldsymbol{p}_i = \begin{bmatrix} \sum_i \lambda_i p_1^i & \sum_i \lambda_i p_2^i & \cdots & \sum_i \lambda_i p_n^i \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Relació de preferència $\preceq$ sobre $\mathcal{P}^*$ (*preference ordering*) és l'especificació d'un ordre dels elements de $\mathcal{P}^*$ que compleix:

- $\boldsymbol{p}_1 \preceq \boldsymbol{p}_2 \preceq \boldsymbol{p}_3 \Rightarrow \boldsymbol{p}_1 \preceq \boldsymbol{p}_3$
- $\boldsymbol{p} \preceq \boldsymbol{p}$
- $\forall \boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2 \Rightarrow \boldsymbol{p}_1 \preceq \boldsymbol{p}_2$ o $\boldsymbol{p}_2 \preceq \boldsymbol{p}_1$ o ambdues.

Si $\boldsymbol{p}_1 \preceq \boldsymbol{p}_2$ y $\boldsymbol{p}_2 \preceq \boldsymbol{p}_1$, aleshores $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ són equivalents (o indiferents) i s'escriu $\boldsymbol{p}_1 \sim \boldsymbol{p}_2$. Si $\boldsymbol{p}_1 \preceq \boldsymbol{p}_2$ y $\boldsymbol{p}_1 \not\sim \boldsymbol{p}_2$ s'escriu $\boldsymbol{p}_1 \prec \boldsymbol{p}_2$.

Utilitat sobre $\mathcal{P}^*$ és una aplicació $u : \mathcal{P}^* \to \mathbb{R}$ que verifica:

$$u\Big(\sum_{i=1}^k \lambda_i \boldsymbol{p}_i\Big) = \sum_{i=1}^k \lambda_i\, u(\boldsymbol{p}_i)$$

on

$$u(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, u(P_i) \qquad (1.3)$$

i $u(P_i)$ és la valoració que es dóna a cada premi P_i. La funció d'utilitat sòl normalitzar-se de forma que si P_0 i P_1 són els premis menys i més preferits, respectivament, aleshores: $u(P_0) = 0$ i $u(P_1) = 1$.

Es diu que la utilitat u **és semblant** (isomòrfica) a una relació de preferència $\preceq$ si:

$$\boldsymbol{p}_1 \preceq \boldsymbol{p}_2 \Leftrightarrow u(\boldsymbol{p}_1) \leq u(\boldsymbol{p}_2)$$

Teorema 1.1 Utilitat semblant a una relació de preferència (Von Neumann-Morgensten)
Si es compleixen els axiomes

1. Axioma de substitució: si $\lambda \in (0,1]$, $\boldsymbol{p}_{1,2,3} \in \mathcal{P}^*$,
   $\boldsymbol{p}_1 \preceq \boldsymbol{p}_2 \Rightarrow \lambda \boldsymbol{p}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{p}_3 \preceq \lambda \boldsymbol{p}_2 + (1-\lambda)\boldsymbol{p}_3$

2. Axioma de continuïtat: si $\boldsymbol{p}_1 \prec \boldsymbol{p}_2 \prec \boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_{1,2,3} \in \mathcal{P}^*$,
   $\exists\, \lambda,\lambda' \mid \lambda \boldsymbol{p}_3 + (1-\lambda)\boldsymbol{p}_1 \prec \boldsymbol{p}_2 \prec \lambda' \boldsymbol{p}_3 + (1-\lambda')\boldsymbol{p}_1$

aleshores existeix una utilitat u semblant a la relació de preferència $\preceq$, única excepte transformacions lineals.

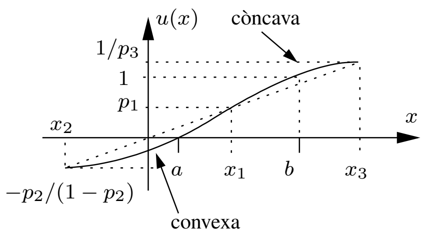

Figura 1.2: Exemple d'utilitat monetària.

1.4 Utilitat monetària

Sovint és convenient suposar que els premis $\mathcal{P}$ consisteixen en una quantitat monetària x, amb utilitat $u(x)$. Les següents característiques son raonables per a $u(x)$:

- No decreixent (més gran és la quantitat monetària, major ha de ser la utilitat).
- Continua.
- Amb un interval de convexitat seguit d'un de concavitat (veure la figura 1.2). Doncs és raonable que $u(x+1) - u(x)$ decreixi al augmentar x (la utilitat de guanyar 1001 és pròxima a la de guanyar 1000).

Recordar que (figura 1.2)

- u convexa:
  $u(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \leq \lambda\, u(x_1) + (1-\lambda)\, u(x_2)$
- u còncava:
  $u(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_3) \geq \lambda\, u(x_1) + (1-\lambda)\, u(x_3)$

En cas de ser u convexa es diu **afició al risc**, doncs la utilitat $u(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2)$ és sempre inferior a jugar la loteria

$$u(\begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix}) = \lambda\, u(x_1) + (1-\lambda)\, u(x_2).$$

Anàlogament, la concavitat s'anomena **aversió al risc**.

Exemple 1.1 Determinació d'$u(x)$
Suposem que $x_1 \in (a,b)$ i que el decisor és capaç de determinar la probabilitat p_1 per a la qual les següents loteries són indiferents:

$$\begin{bmatrix} 1-p_1 & p_1 \\ a & b \end{bmatrix} \sim x_1$$

Amb la normalització $u(a) = 0$, $u(b) = 1$, de (1.3) tenim: $(1-p_1)\, u(a) + p_1\, u(b) = u(x_1)$, d'on $u(x_1) = p_1$ (veure la figura 1.2).

Suposem ara que per $x_2 < a$ i $b < x_3$ es té

$$\begin{bmatrix} 1-p_2 & p_2 \\ x_2 & b \end{bmatrix} \sim a, \quad \begin{bmatrix} 1-p_3 & p_3 \\ a & x_3 \end{bmatrix} \sim b$$

Operant igual que abans tenim:

$$(1-p_2)\, u(x_2) + p_2\, u(b) = u(a)$$
$$(1-p_3)\, u(a) + p_3\, u(x_3) = u(b)$$

d'on $u(x_2) = -p_2/(1-p_2)$, $u(x_3) = 1/p_3$. ■

1.5 Probabilitat subjectiva

El concepte de probabilitat subjectiva es va proposar formalment en [1]. Està motivat per dues maneres d'interpretar el concepte de probabilitat:

- Interpretació *lògica*: Idea més intuïtiva de la probabilitat, associada amb la plausibilitat o expectativa. Per mesurar-la hem d'avaluar les preferències personals. Per això es parla de **probabilitat subjectiva**.
- Interpretació *estadística o física*: Idea de freqüència, mesurable empíricament com a la proporció dels successos assolits en una sèrie de proves (*chances*). Aquí suposem que podem definir un dispositiu, per exemple, una ruleta ideal, que ens permet una avaluació de les probabilitats. Es parla de **probabilitat objectiva**.

En [1] dóna una definició constructiva de la probabilitat subjectiva en termes de les probabilitats objectives i una relació de preferència. A continuació s'explica [1] aplicat a la teoria de la dedició, i seguint la notació de [2].

Perspectives incertes Siguin els estats de la natura $\theta_i \in \Theta, i = 1, \cdots m$. Una **perspectiva incerta** $\boldsymbol{g} \in \mathcal{J}$ associa una loteria $\boldsymbol{p}_i \in \mathcal{P}^*$ a cada estat $\theta_i, i = 1, \cdots m$, i ho representarem de la forma:

$$\boldsymbol{g} = \langle \boldsymbol{p}_1, \cdots \ \boldsymbol{p}_m \rangle \tag{1.4}$$

Ara construïm una *loteria composta* (*compound lottery*) $\boldsymbol{G} \in \mathcal{J}^*$ on els premis són perspectives incertes, és a dir:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \cdots & \boldsymbol{g}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \\ \langle \boldsymbol{p}_1^1, \cdots \ \boldsymbol{p}_m^1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{p}_1^n, \cdots \ \boldsymbol{p}_m^n \rangle \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

$\mathcal{J}^*$ és el conjunt de totes les possibles loteries definides sobre el mateix conjunt de premis $\boldsymbol{g}_1, \cdots \boldsymbol{g}_n \in \mathcal{J}$. Suposem que s'han definit les relacions de preferència $\preceq$ en $\mathcal{P}^*$ i $\overset{*}{\preceq}$ en $\mathcal{J}^*$, i que compleixen els axiomes del teorema 1.1, amb utilitats u i u^*, respectivament.

Teorema 1.2 Probabilitats subjectives (Anscombe-Aumann)

En les condicions anteriors, si es compleix:

1. Monotonicitat dels premis:

$$\boldsymbol{p}_i \preceq \boldsymbol{p}'_i \Rightarrow \langle \boldsymbol{p}_1, \cdots \ \boldsymbol{p}_i, \cdots \ \boldsymbol{p}_m \rangle \overset{*}{\preceq} \langle \boldsymbol{p}_1, \cdots \ \boldsymbol{p}'_i, \cdots \ \boldsymbol{p}_m \rangle$$

2. Preferència estricta:

$$\boldsymbol{p}_i \prec \boldsymbol{p}'_i \Rightarrow \langle \boldsymbol{p}_i, \cdots \ \boldsymbol{p}_i, \cdots \ \boldsymbol{p}_i \rangle \overset{*}{\prec} \langle \boldsymbol{p}'_i, \cdots \ \boldsymbol{p}'_i, \cdots \ \boldsymbol{p}'_i \rangle$$

3. Reversió:

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \cdots & \boldsymbol{g}_n \end{bmatrix} \overset{*}{\sim} \left\langle \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \\ \boldsymbol{p}_1^1 & \cdots & \boldsymbol{p}_1^n \end{bmatrix}, \cdots \ \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \\ \boldsymbol{p}_m^1 & \cdots & \boldsymbol{p}_m^n \end{bmatrix} \right\rangle \tag{1.6}$$

Notar que els elements de la part esquerra i dreta de 1.6 pertanyen als conjunts $\mathcal{J}^*$ i $\mathcal{J}$, respectivament. La relació 1.6 equival a considerar que és indiferent una loteria que una perspectiva incerta que, donat un estat de la natura, dóna un mateix premi amb igual probabilitat.

aleshores existeix un conjunt únic de **probabilitats subjectives** $\pi_1, \cdots \pi_m$ tals que per a qualsevol $\langle \boldsymbol{p}_1, \cdots \ \boldsymbol{p}_m \rangle \in \mathcal{J}$

$$u^*(\langle \boldsymbol{p}_1, \cdots \ \boldsymbol{p}_m \rangle) = \pi_1 \, u(\boldsymbol{p}_1) + \cdots \pi_m \, u(\boldsymbol{p}_m). \tag{1.7}$$

Capítol 2
Decisió en ambient de risc i d'incertesa

Tal com s'ha introduït en la secció 1.1, pàg. 1, l'estat de la natura θ té una distribució, que anomenarem $\boldsymbol{\pi}(\theta)$, que pot ser coneguda o no. Això dóna lloc als problemes de decisió en ambient de risc o incertesa, respectivament, que tractarem en les següents seccions. La funció de pèrdua $L(a,\theta) : A \times \Theta \to \mathbb{R}$ associada al conjunt d'accions $a \in A$, és una variable aleatòria (depenent de θ) amb distribució $F_a(x|\theta) = P(L(a,\theta) \leq x)$.

2.1 Ambient de risc

En aquest cas el decisor coneix la distribució $\boldsymbol{\pi}(\theta)$ de l'estat de la natura θ. Ara el problema consisteix en determinar un criteri C que ordeni les accions, de manera que a_1 és millor que a_2 si $C(a_1) < C(a_2)$ (o el contrari si es mesura el guany). És a dir, triat un criteri $C(a)$ es busca l'acció òptima a^* solució de:

$$\min_{a \in A} C(a)$$

si es mesura la pèrdua, o:

$$\max_{a \in A} C(a)$$

si es mesura el guany.

Criteri del valor esperat

$$C(a) = \mathrm{E}_\theta[L(a,\theta)] = \int_\Theta L(a,\theta) \, \boldsymbol{\pi}(\mathrm{d}\theta) \tag{2.1}$$

Criteri mitjana-dispersió

$$C(a) = \mathrm{E}_\theta[L(a,\theta)] + \lambda \, \sigma_\theta(L(a,\theta)) \tag{2.2}$$

on $\lambda > 0$ (o $\lambda < 0$ en cas de mesurar guany). Notar que amb aquest criteri:

$$P(L(a,\theta) \leq C(a)) = P\left(\frac{L(a,\theta) - \mu(a)}{\sigma(a)} \leq \lambda\right) \approx \phi(\lambda)$$

si la distribució de $L(a,\theta)$ és $N(\mu(a),\sigma(a))$ (ϕ és la distribució de $N(0,1)$).

Cal notar que aquest criteri pot no respectar el principi de dominància. Per tant, primer cal descartar les accions dominades.

Criteri de risc fix És apropiat per aquelles decisions que es prenen un sòl cop, i en les que L és una VA contínua. La decisió és triar el quantil de nivell λ:

$$C(a) = F_a^{-1}(\lambda) \Rightarrow P(L(a,\theta) > C(a)) = 1 - \lambda. \tag{2.3}$$

És a dir, es tria un valor λ pròxim a 1, tal que la probabilitat de que la pèrdua superi un cert valor $C(a)$ sigui petita. En cas de guany triaríem un valor de λ pròxim a 0 (és a dir, que el guany superi $C(a)$ amb una probabilitat pròxima a 1). Notar que el criteri compleix el principi de dominància.

Criteri de màxima probabilitat És semblant a l'anterior. Ara es fixa k tal que:

$$C(a) = 1 - F_a(k) \Rightarrow C(a) = P(L(a,\theta) > k) \quad (2.4)$$

És a dir, es busca minimitzar la probabilitat que la pèrdua superi un valor k. En cas de guany, es busca maximitzar la probabilitat de tenir un guany k.

Criteri del valor esperat amb clàusula de seguretat Es desitja descartar les accions amb pèrdua superior a k, i triar l'acció de menor pèrdua esperada d'entre les que queden:

$$C(a) = \begin{cases} \mathrm{E}_\theta[L(a,\theta)] & \text{si } 1 - F_a(k) < \epsilon \\ \infty & \text{si } 1 - F_a(k) \geq \epsilon \end{cases} \quad (2.5)$$

on ϵ és un valor proper a 0. Notar que $1 - F_a(k) \geq \epsilon \Rightarrow P(L(a,\theta) > k) \geq \epsilon$. Si es mesura guany:

$$C(a) = \begin{cases} \mathrm{E}_\theta[L(a,\theta)] & \text{si } 1 - F_a(k) < \epsilon \\ -\infty & \text{si } 1 - F_a(k) \geq \epsilon \end{cases} \quad (2.6)$$

Notar que aquest criteri compleix el principi de dominància.

2.2 Ambient d'incertesa

No es coneix l'estat de la natura θ ni la seva distribució $\boldsymbol{\pi}(\theta)$. El problema és el mateix que en la secció anterior, però la determinació del criteri que ordena les accions (que anomenarem $S(a)$, seguint la notació de [2]), està més obert al no conèixer $\boldsymbol{\pi}$.

Criteri de Wald (o minimax) El decisor considera el cas més pessimista (*worst case*). És a dir, que sempre resulta l'estat de la natura que més perjudica cada acció. Aquesta solució està justificada en la teoria de jocs, però pot ser poc raonable en la teoria de la decisió. En concret, el criteri és suposar que sempre es produeix la màxima pèrdua:

$$S(a) = \max_\theta L(a,\theta) \quad (2.7)$$

que implica una acció òptima a^* solució de:

$$\min_a \max_\theta L(a,\theta). \quad (2.8)$$

És a dir, triar l'acció que minimitza la pèrdua, suposant que sempre és la màxima possible (d'aquí el nom de **minimax**). En cas de mesurar el guany, el criteri seria el contrari. És a dir, l'acció òptima seria la solució del problema **maximin**.

Criteri de Hurwicz Busca una solució no tan pessimista fent una ponderació λ entre la solució més pessimista i més optimista:

$$S(a) = \lambda \max_\theta L(a,\theta) + (1 - \lambda) \min_\theta L(a,\theta) \quad (2.9)$$

Per decidir el valor de λ es sòl fer un gràfic de $S(a,\lambda)$ per a diferents valors d'a i es tria el valor de λ que dóna un valor més petit (o més gran, en cas de mesurar el guany).

Criteri de Laplace Consisteix es suposar els estats de la natura equiprobables, i considerar òptima l'acció que minimitza:

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} L(a,\theta_i) \quad (2.10)$$

on s'ha obviat el factor $1/n$. En cas de que el conjunt d'estats de la natura sigui un volum finit $\Theta \subset \mathbb{R}^n$:

$$S(a) = \int_\Theta L(a,\theta)\ \mathrm{d}\theta \quad (2.11)$$

que equival a suposar que la distribució $\boldsymbol{\pi}(\theta)$ és uniforme en Θ. En cas de mesurar el guany, es triaria com opció òptima aquella que maximitza els criteris (2.10) o (2.11).

Criteri de Savage Definim la funció de decepció (*regret*) com:

$$D(a,\theta) = L(a,\theta) - \min_a L(a,\theta). \quad (2.12)$$

La funció de decepció és una mesura del grau d'equivocació al prendre l'acció a si l'estat de la natura ha estat θ. En el sentit que dóna la distància entre la pèrdua obtinguda, i la mínima pèrdua que es podria haver tingut al triar la millor acció davant θ. El criteri de Savage és minimitzar la màxima decepció. És a dir, el criteri per triar l'acció és:

$$S(a) = \max_\theta D(a,\theta) = \max_\theta \Big(L(a,\theta) - \min_a L(a,\theta) \Big). \quad (2.13)$$

És a dir, l'opció òptima a^* és la que minimitza (2.13). D'aquí que també s'anomena **criteri de decepció minimax** (*minimax regret*).

En cas de mesurar el **guany**, la funció de decepció seria $\max_a L(a,\theta) - L(a,\theta)$. Al tractar-se d'una pèrdua, en aquest cas hem de continuar aplicant el criteri de decepció minimax. És a dir, l'acció òptima a^* és la que minimitza el criteri:

$$S(a) = \max_\theta \left(\max_a L(a,\theta) - L(a,\theta) \right). \tag{2.14}$$

Criteri de Bayes amb probabilitat subjectiva Consisteix en pressuposar una distribució de probabilitat dels estats de la natura, $\boldsymbol{\pi}(\theta)$ (això converteix el problema en una decisió en ambient de risc, secció 2.1), i considerar òptima l'acció que minimitza el criteri del valor esperat:

$$S(a) = \mathrm{E}_\theta[L(a,\theta)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \pi_i \, L(a,\theta_i) \\ \displaystyle\int_\Theta L(\theta,a)\, \boldsymbol{\pi}(\mathrm{d}\theta) \end{cases} \tag{2.15}$$

segons $\boldsymbol{\pi}$ sigui discreta o contínua. Nota: Es fa servir la notació $\pi_i = \boldsymbol{\pi}(\theta_i)$. Si la distribució és discreta es pot fer servir el joc De Finetti per estimar la distribució, que consisteix en proposar la alternativa de guanyar 1000 si es dóna θ_i o participar en la loteria $\begin{bmatrix} 1-\pi_i & \pi_i \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$, ajustant π_i fins que són indiferents.

En cas d'una distribució continua, es pot emprar el principi de màxima entropia, que consisteix en minimitzar

$$H = -\int_\Theta \boldsymbol{\pi}(\theta)\, \log \boldsymbol{\pi}(\theta)\; \mathrm{d}\theta. \tag{2.16}$$

A continuació es donen algunes restriccions i la distribució de màxima entropia:

- Mitjana μ i variancia $\sigma^2 \Rightarrow$ normal $N(\mu,\sigma)$.
- **dom** $\boldsymbol{\pi} = [0,\infty)$ i mitjana $\mu \Rightarrow$ exponencial.
- **dom** $\boldsymbol{\pi} = \{\theta_1, \cdots \theta_n\}$ i mitjana $\mu \Rightarrow \pi_i = C\, r^{\theta_i}$, on C i r es determinen de $\mu = \sum \theta_i\, \pi_i$ i $\sum \pi_i = 1$.
- Si la única restricció és el domini de la distribució (**dom** $\boldsymbol{\pi} = [a,b]$, o bé **dom** $\boldsymbol{\pi} = \{\theta_1, \cdots \theta_n\}$) $\Rightarrow$ uniforme (per tant, coincideix amb el criteri de Laplace).

Capítol 3
Decisions aleatoritzades

3.1 Introducció

Ara les accions $a \in A$ es trien amb una distribució $\boldsymbol{\alpha} \in A^*$, on designem amb A^* l'espai de totes les accions aleatoritzades d'A. És a dir, donat un problema de decisió (A, Θ, L) considerem el problema estès (A^*, Θ, L) que inclou totes les accions aleatoritzades. En el problema estès la funció de pèrdua és:

$$L(\boldsymbol{\alpha},\theta) == \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, L(a_i,\theta) \\ \displaystyle\int_A L(a,\theta)\, \boldsymbol{\alpha}(\mathrm{d}a) \end{cases} \tag{3.1}$$

segons $\boldsymbol{\alpha}$ sigui discreta o contínua. Dels criteris explicats en la secció , només considerarem l'esquema estès amb el criteri de Bayes i Wald (minimax).

Dominància es diu que l'acció $\boldsymbol{\alpha}$ domina $\boldsymbol{\alpha}'$ si $L(\boldsymbol{\alpha},\theta) \le L(\boldsymbol{\alpha}',\theta)$, amb la desigualtat estricta per algun θ.

Admissibilitat Es diu que una acció $\boldsymbol{\alpha} \in A^*$ és admissible si no existeix una altra $\boldsymbol{\alpha}' \in A^*$ que domina $\boldsymbol{\alpha}$.

Classe completa $A^*_{cc} \subset A^+$ és una classe completa si per a qualsevol $\boldsymbol{\alpha} \notin A_{cc}$ existeix una acció $\boldsymbol{\alpha}' \in A_{cc}$ que domina $\boldsymbol{\alpha}$. Una classe completa es diu **minimal** si no existeix una altra classe completa més petita. Si existeix una classe completa minimal, aleshores és igual al conjunt de totes les accions admissibles.

3.2 Decisions Bayes

En aquest context el valor esperat s'anomena **risc Bayes**:

$$r(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\pi}) = \mathrm{E}_\theta[L(\boldsymbol{\alpha},\theta)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \pi_i \, L(\boldsymbol{\alpha},\theta_i) \\ \displaystyle\int_\Theta L(a,\theta)\, \boldsymbol{\pi}(\mathrm{d}\theta) \end{cases} \tag{3.2}$$

segons $\boldsymbol{\pi}$ sigui discreta o contínua. Les opcions òptimes minimitzen el risc. Farem servir la notació:

$$\hat{r}(\boldsymbol{\pi}) = \inf_{a\in A} r(a,\boldsymbol{\pi}) \tag{3.3}$$

$$\hat{r}^*(\boldsymbol{\pi}) = \inf_{\boldsymbol{\alpha}\in A^*} r(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\pi}) \tag{3.4}$$

segons si fem servir les accions pures o aleatoritzades. Direm que a^* o $\boldsymbol{\alpha}^*$ és una **acció Bayes** davant $\boldsymbol{\pi}$ si $r(a^*,\boldsymbol{\pi}) = \hat{r}(\boldsymbol{\pi})$ o $r(\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\pi}) = \hat{r}^*(\boldsymbol{\pi})$, respectivament.

Nota: si els estats de la natura i les accions del decisor són conjunts discrets, i definim la matriu L amb elements $L_{ij} = L(a_j, \theta_i)$, aleshores

$$r(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\pi}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\, \pi_j\, L(a_i,\theta_j) = \boldsymbol{\alpha}\, L\, \boldsymbol{\pi} \tag{3.5}$$

on suposem que $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_m\end{bmatrix}$ és un vector fila i $\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix}\pi_1 & \cdots & \pi_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ un vector columna. Notar l'analogia amb un joc bipersonal de suma zero.

Proposició 3.1 Si la funció de pèrdua està acotada inferiorment, aleshores $\hat{r}(\boldsymbol{\pi}) = \hat{r}^*(\boldsymbol{\pi})$ per a qualsevol $\boldsymbol{\pi}$.

Interpretació geomètrica Suposem un problema de decisió amb 2 estats de la natura i 6 accions amb matriu de pèrdues:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1{,}5 & 1{,}5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}$$

on F_i són les files de L. Podem construir el conjunt de tots els valors que pot assolir el risc Bayes donat per (3.5) com l'envolupant convexa de les files F_i (figura 3.1):

$$\hat{G} = \boldsymbol{\alpha}\, L\, \boldsymbol{\pi} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\ (F_i\, \boldsymbol{\pi}) = \text{Conv}\,\{F_1, \cdots F_m\} \tag{3.6}$$

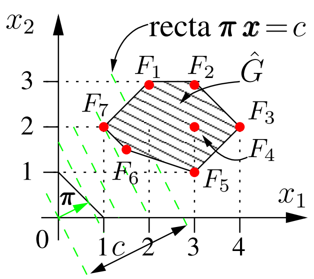

Figura 3.1: Envolupant convexa d'un problema de decisió, i solució Bayes.

Per calcular el risc Bayes davant $\boldsymbol{\pi}$ (solució de (3.4)), hem de buscar la intersecció de la família de rectes $\boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{x} = c$ amb la part inferior del conjunt $\hat{G}$ (figura 3.1). El punt d'intersecció serà $\hat{r}(\boldsymbol{\pi}) = c$. Notar que les rectes $\boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = c$ són perpendiculars al vector $\boldsymbol{\pi}$[1]. Del gràfic queda clar que sempre es pot trobar una solució no aleatoritzada tan bona com una aleatoritzada. Per tant, no té interès considerar les decisions aleatoritzades quan busquem el risc Bayes.

En l'exemple anterior, agafem

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix}\pi & 1-\pi\end{bmatrix},\ \pi \in [0{,}1]$$
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} \in \hat{G}$$

Hem de buscar $\hat{r}(\boldsymbol{\pi}) = \inf_{\boldsymbol{x}\in\hat{G}} \boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$. La recta que passa per F_5F_6 és:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1{,}5 & 1{,}5 & 1 \\ x_1 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = \frac{3}{2}$$

d'on deduïm que per $\pi \in [0,\frac{1}{4}]$:

$$\hat{r}(\boldsymbol{\pi}) = \inf_{\pi\in[0,\frac{1}{4}]} r(F_5,\boldsymbol{\pi}) = \inf_{\pi\in[0,\frac{1}{4}]} 3\,\pi + (1-\pi) = 1$$

La recta que passa per F_6F_7 és:

$$\begin{vmatrix} 1{,}5 & 1{,}5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x_1 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{3}{2}$$

d'on deduïm que per $\pi \in [\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$:

$$\hat{r}(\boldsymbol{\pi}) = \inf_{\pi\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]} r(F_6,\boldsymbol{\pi}) = \inf_{\pi\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]} 1{,}5\,\pi + 1{,}5\,(1-\pi) = 1{,}5$$

Finalment, per $\pi \in [0,\frac{1}{4}]$:

$$\hat{r}(\boldsymbol{\pi}) = \inf_{\pi\in[0,\frac{1}{4}} r(F_7,\boldsymbol{\pi}) = \inf_{\pi\in[0,\frac{1}{4}]} \pi + 2\,(1-\pi) = 1$$

Proposició 3.2 Si la funció de pèrdua $L(a,\theta)$ està acotada, aleshores existeix una acció Bayes davant qualsevol distribució $\boldsymbol{\pi}$.

Proposició 3.3 Si l'acció Bayes $\boldsymbol{\alpha}$ davant $\boldsymbol{\pi}$ és única, aleshores $\boldsymbol{\alpha}$ és admissible.

Proposició 3.4 Si Θ és finit i $\boldsymbol{\pi}$ té $\pi_i > 0$, aleshores qualsevol acció $\boldsymbol{\alpha}$ que sigui Bayes davant $\boldsymbol{\pi}$ és admissible.

Proposició 3.5 Si Θ és finit i $\boldsymbol{\alpha}$ és admissible, aleshores existeix una distribució $\boldsymbol{\pi}$ per a la que $\boldsymbol{\alpha}$ és Bayes davant $\boldsymbol{\pi}$.

Proposició 3.6 Si Θ és finit i $L(a,\theta)$ i $\hat{G}$ estan acotats inferiorment, aleshores la classe d'accions Bayes davant $\boldsymbol{\pi}$ és una classe completa.

3.3 Decisions minimax

Resulta d'aplicar el criteri de Wald (veure la secció 3.1, pàg. 6) amb accions aleatoritzades:

$$\bar{V} = \inf_{\boldsymbol{\alpha}} \sup_{\boldsymbol{\pi}} L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\pi}) \tag{3.7}$$

[1]Notar que $\boldsymbol{\pi}\,(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)^{\mathrm{T}} = 0$ on $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ és un vector sobre la recta. Recordar també que el producte escalar de dos vectors és: $\boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = \|\pi\|\,\|\boldsymbol{x}\|\cos\phi$, per tant $\boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = \|\boldsymbol{x}\|$ quan $\phi = 0$.

Ara fem servir la notació $L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\pi})$ per representar una acció aleatoritzada $\boldsymbol{\alpha}$ amb una distribució $\boldsymbol{\pi}$ sobre els estats de la natura. Explícitament:

$$L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\pi}) = \int_{\Theta}\int_{A} L(a,\theta)\,\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{d}a)\,\boldsymbol{\pi}(\mathrm{d}\theta) \qquad (3.8)$$

Per analogia amb la teoria de jocs anomenarem a $\bar{V}$ **valor** del problema de decisió.

Teorema 3.1 Teorema del minimax
Si Θ és finit i $L(a,\theta)$ i $\hat{G}$ estan acotats inferiorment, aleshores $L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\pi})$ té un punt de sella $\boldsymbol{\alpha}_o, \boldsymbol{\pi}_o$ on:

$$\sup_{\boldsymbol{\pi}\in\Theta^*}\inf_{\boldsymbol{\alpha}\in A^*} L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\pi}) = L(\boldsymbol{\alpha}_o,\boldsymbol{\pi}_o) = \inf_{\boldsymbol{\alpha}\in A^*}\sup_{\boldsymbol{\pi}\in\Theta^*} L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\pi}) \qquad (3.9)$$

Demostració. (veure també els apunts de teoria de jocs) Considerem el problema de decisió $D = (A^*,\Theta^*,L^{m\times n})$ i el problema equivalent $\hat{D} = (\hat{G},\Theta^*,\hat{L})$ on:

$$\hat{G} = \text{Conv}\,\{F_1,\cdots F_n\} \qquad (3.10)$$
$$\hat{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}},\, \boldsymbol{x}\in\hat{G} \qquad (3.11)$$

és a dir, el conjunt $\hat{G}$ és l'envolupant convexa generada per les files de L. Clarament, $\hat{D}$ i D són problemes equivalents. Per $\hat{D}$ tenim:

$$\Lambda(\boldsymbol{\pi}) = \inf_{\boldsymbol{x}\in\hat{G}} \hat{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\pi}) = \min_{\boldsymbol{x}\in\hat{G}} \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} \qquad (3.12)$$
$$\gamma(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{\pi}\in\Theta^*} \hat{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\pi}) = \max_i\{\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{u}_i\} = \max_i\{x_i\} \qquad (3.13)$$

on $\boldsymbol{u}_i = (0,\cdots \overset{i}{\smile}\!\!\!1,\cdots 0)$. El valors inferior $\underline{\mathrm{V}}$ i superior $\bar{V}$ del problema de decisió són:

$$\underline{\mathrm{V}} = \max_{\boldsymbol{\pi}\in\Theta^*}\Lambda(\boldsymbol{\pi})$$
$$\bar{V} = \min_{\boldsymbol{x}\in\hat{G}}\gamma(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{x}\in\hat{G}}\max_i\{x_i\}$$

Sigui el quadrant

$$\mathcal{T} = \{\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^n \mid \max_i\{t_i\} < \bar{V}\}. \qquad (3.14)$$

$\mathcal{T}$ i $\hat{G}$ són convexes i disjunts, doncs si $\boldsymbol{x}\in\hat{G}$, aleshores $\bar{V} = \min_{\boldsymbol{x}\in\hat{G}}\max_i\{x_i\} \le \max_i\{x_i\}$, que és incompatible amb $\bar{V} > \max_i\{t_i\}$. Per tant, existeix un hiperplà $H(\boldsymbol{u},c)$ que separa $\hat{G},\mathcal{T}$:

$$\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \ge c,\ \forall\boldsymbol{x}\in\hat{G}$$
$$\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \le c,\ \forall\boldsymbol{t}\in\mathcal{T}$$

d'on tenim que $\boldsymbol{\pi}_o = \boldsymbol{u}/\sum_i u_i$ és la **distribució més desfavorable** de θ i $V = c/\sum_i u_i$ és el valor del problema de decisió. Un punt $\boldsymbol{x}_o$ de l'hiperplà $H(\boldsymbol{u},c)$ en la frontera de $\hat{G},\mathcal{T}$ serà una acció Bayes davant $\boldsymbol{\pi}_o$. Per tant, una acció òptima vindrà donada per $\boldsymbol{\alpha}_o = (\alpha_1,\cdots\alpha_m)$ tal que $\boldsymbol{\pi}_o = \sum_i \alpha_i\,F_i$, on F_i són les files de la matriu L. □

3.3.1 Files i columnes rellevants

Definició 3.1 [2] Es diu que una **fila** F_i és **rellevant** si existeix una acció Bayes $\boldsymbol{\alpha}_o = (\alpha_1,\cdots\alpha_m)$ on $\alpha_i > 0$.

Es diu que una **columna** C_j és **rellevant** si existeix una distribució més desfavorable $\boldsymbol{\pi}_o = (\pi_1,\cdots\pi_n)$ on $\pi_j > 0$.

Teorema 3.2 Files o columnes rellevants
Si la fila F_i és rellevant, v és el valor del problema i $\boldsymbol{\pi}_o \in O(\theta)$ (conjunt de distribucions més desfavorables), i:

$$F_i\,\boldsymbol{\pi}_o = v$$

Si la columna C_j és rellevant, v és el valor del problema i $\boldsymbol{\alpha}_o \in O(A)$ (conjunt d'accions minimax), i:

$$\boldsymbol{\alpha}_o\,C_j = v$$

Teorema 3.3 Nombre de files i columnes rellevants
Un problema de decisió matricial amb matriu $L^{m\times n}$ té com a molt $\min\{m,n\}$ columnes i files rellevants. Això és equivalent a dir que les accions Bayes i distribució dels estats més desfavorable (estratègies òptimes dels jugadors en teoria de jocs) és com a molt una mixtura de $\min\{m,n\}$ accions/estats (estratègies pures en teoria de jocs).

Teorema 3.4 Eliminació de files i columnes dominades
Si en un problema de decisió matricial s'eliminen les files i columnes dominades (estrictament o no), aleshores el valor del problema de decisió i el conjunt d'accions admissibles (estratègies òptimes en teoria de jocs) no canvia.

[2]Tot que i que la definició de files i columnes rellevants no està en el llibre de l'UNED [2], és un resultat de la teoria de jocs útil en la determinació de les decisions minimax.

3.3.2 Mètodes geomètrics de resolució

Mètode de l'envolupant convexa Mètode basat amb la demostració del teorema del minimàx (veure el teorema 3.1, pàg. 8). Només es vàlid per problemes amb matrius $2 \times n$ o $m \times 2$. Considerem primer un problema de decisió amb una matriu de guanys $2 \times n$:

$$G = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots a_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$$

on C_i són les columnes de G. Es tracta de construir els conjunts:

$$\hat{G} = \text{Conv}\,\{C_1, \cdots C_n\} \tag{3.15}$$

$$\mathcal{T} = \{\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n \mid \max_i\{t_i\} < v\} \tag{3.16}$$

de forma que els conjunts $\hat{G}$ i $\mathcal{T}$ es toquin en la frontera en un punt $\boldsymbol{x}_o$. Després es construeix l'hiperplà que passa per $\boldsymbol{x}_o$ i separa $\hat{G}$ i $\mathcal{T}$:

$$a\,t_1 + b\,t_2 = c$$

d'on es té que $v = c/(a+b)$ és el valor del problema de decisió i l'acció Bayes és:

$$\boldsymbol{\alpha}_o = \left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right)$$

Per a l'estat més desfavorable, o bé $\boldsymbol{x}_o \in \hat{G} \cap \mathcal{T}$ coincideix amb una columna C_i de G, i en aquest cas és l'estat θ_i, o bé està en un segment (C_i, C_j), i en aquest cas hem de calcular un λ_o, tal que:

$$\boldsymbol{x}_o = \lambda_0\,C_i + (1-\lambda_0)\,C_j$$

$$\boldsymbol{\pi}_o = (0, \cdots, \overbrace{\lambda_0}^{i}, 0, \cdots, \overbrace{(1-\lambda_0)}^{j}, 0, \cdots)$$

De forma anàloga es pot resoldre un problema de decisió amb una matriu de guanys $m \times 2$. Només cal construir els conjunts:

$$\begin{aligned} \hat{G} &= \text{Conv}\,\{F_1, \cdots F_n\} \\ \mathcal{T} &= \{\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n \mid \min_i\{t_i\} > v\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

on F_i són les files de G. Notar que en la demostració del teorema (veure el teorema 3.1, pàg. 8) s'ha considerat una matriu de pèrdues i no de guanys. En cas d'una matriu de pèrdues, l'envolupant convex de les files representa el conjunt dels valors del problema per a totes les possibles distribucions dels estats de la natura. Per això, l'acció Bayes és la intersecció del quadrant inferior (equació (3.14)), en comptes del superior (equació (3.17)). A continuació es llista el quadrant a considerar segons el problema. Definim

$$\text{Quadrant inferior: } \{\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n \mid \max_i\{t_i\} < v\}$$

$$\text{Quadrant superior: } \{\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n \mid \min_i\{t_i\} > v\}$$

- **Matriu** $n \times 2$:

$$\hat{G} = \text{Conv}\,\{F_1, \cdots F_n\}$$

(Generat per la distribució d'estats, $\boldsymbol{\pi}$)

$$\mathcal{T} = \begin{cases} \text{pèrdues:} & \text{Quadrant inferior} \\ \text{guanys:} & \text{Quadrant superior} \end{cases}$$

- **Matriu** $2 \times m$

$$\hat{G} = \text{Conv}\,\{C_1, \cdots C_m\}$$

(Generat per la distribució d'accions, $\boldsymbol{\alpha}$)

$$\mathcal{T} = \begin{cases} \text{pèrdues:} & \text{Quadrant superior} \\ \text{guanys:} & \text{Quadrant inferior} \end{cases}$$

Capítol 4
Decisions amb experimentació

4.1 Ingredients

Experiment que genera una VA $X \in \mathcal{X}$ que depèn de l'estat de la natura θ, amb distribució $P(\boldsymbol{x}|\theta)$.

Distribució a priori de l'estat de la natura $\boldsymbol{\pi}(\theta)$. Per exemple, en cas d'haver-hi 2 estats de la natura

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \pi & 1-\pi \end{bmatrix}$$

Distribució a posteriori de l'estat de la natura:

$$\boldsymbol{\pi}(\theta|\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{\pi}(\theta)\,P(\boldsymbol{x}|\theta)}{P(\boldsymbol{x})} \tag{4.1}$$

on $P(\boldsymbol{x}) = \int_\Theta P(\boldsymbol{x}|\theta)\,\boldsymbol{\pi}(\mathrm{d}\theta)$. Per exemple, en cas d'haver-hi 2 estats de la natura

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}(\theta_1|\boldsymbol{x}) &= \frac{\pi\,P(\boldsymbol{x}|\theta_1)}{P(\boldsymbol{x})} \\ \boldsymbol{\pi}(\theta_2|\boldsymbol{x}) &= 1 - \boldsymbol{\pi}(\theta_1|\boldsymbol{x}) \\ P(\boldsymbol{x}) &= \pi\,\boldsymbol{\pi}(\theta_1|\boldsymbol{x}) + (1-\pi)\,\boldsymbol{\pi}(\theta_2|\boldsymbol{x}) = \\ &\quad \pi\,\boldsymbol{\pi}(\theta_1|\boldsymbol{x}) + (1-\pi)\,(1-\boldsymbol{\pi}(\theta_1|\boldsymbol{x})) \end{aligned}$$

Regla de decisió $d : \mathcal{X} \to A$ del decisor, que assigna una acció a cada possible resultat de l'experiment. Notació: Igual que amb les accions i estats de la natura, farem servir $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots x_l)$ per referir-nos al cas general d'un vector de l possibles resultats de l'experiment, i $\boldsymbol{d} = d(\boldsymbol{x}) = (a_1, \cdots a_l)$, $a_i \in A$ al vector de decisions que es prenen per a cada possible valor de $\boldsymbol{x}$.

Funció de risc per avaluar la regla de decisió $\boldsymbol{d} = d(\boldsymbol{x}) = d(x_1, \cdots x_l) = (a_1, \cdots a_l)$:

$$R(\boldsymbol{d},\theta) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{l} P(x_i|\theta)\, L(a_i,\theta) \\ \int_{\mathcal{X}} L(d(\boldsymbol{x}),\theta)\, P(\mathrm{d}\boldsymbol{x}|\theta) \end{cases} \tag{4.2}$$

que representa la pèrdua esperada al fer servir la regla de decisió $d(\boldsymbol{x})$.

Aquest esquema transforma el problema de decisió (A,Θ,L) en el problema de decisió $(\mathcal{D},\Theta,R)$, al que podem aplicar els resultats dels capítols anteriors.

4.2 Decisions Bayes i minimax

En concret, al aplicar el criteri de decisió Bayes al problema $(\mathcal{D},\Theta,R)$, el **risc Bayes** és:

$$r(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\pi}) = \mathrm{E}_\theta[R(\boldsymbol{d},\theta)] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \pi(\theta_i)\, R(\boldsymbol{d},\theta_i) \\ \int_{\Theta} R(\boldsymbol{d},\theta)\, \boldsymbol{\pi}(\mathrm{d}\theta) \end{cases} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \pi(\theta_i) \sum_{j=1}^{l} P(x_j|\theta_i)\, L(a_j,\theta_i) \\ \int_{\Theta}\int_{\mathcal{X}} L(d(\boldsymbol{x}),\theta)\, P(\mathrm{d}\boldsymbol{x}|\theta)\, \boldsymbol{\pi}(\mathrm{d}\theta) \end{cases} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{l} P(x_j) \sum_{i=1}^{n} \pi(\theta_i|x_j)\, L(a_j,\theta_i) \\ \int_{\mathcal{X}}\int_{\Theta} L(d(\boldsymbol{x}),\theta)\, \boldsymbol{\pi}(\mathrm{d}\theta|\boldsymbol{x})\, P(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) \end{cases} = \mathrm{E}_{\boldsymbol{x}}[r(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\pi}|\boldsymbol{x})] \tag{4.3}$$

segons $\boldsymbol{\pi}$ i $\boldsymbol{x}$ siguin discretes o contínues. Notar que:

$$r(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\pi}|\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \pi(\theta_i|\boldsymbol{x})\, L(d(\boldsymbol{x}),\theta_i) \\ \int_{\Theta} L(d(\boldsymbol{x}),\theta)\, \boldsymbol{\pi}(\mathrm{d}\theta|\boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{4.4}$$

La **regla de decisió Bayes** $d^*(\boldsymbol{x})$ minimitza el risc (equació (4.3)) per cada $\boldsymbol{x}$ davant la distribució $\boldsymbol{\pi}(\theta|\boldsymbol{x})$:

$$\hat{r}(\boldsymbol{\pi}) = \inf_{\boldsymbol{d}\in\mathcal{D}} r(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\pi}) \tag{4.5}$$

Notar que per minimitzar l'equació (4.3) hem de triar la decisió $d^*(\boldsymbol{x})$ que minimitza $r(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\pi}|\boldsymbol{x})$ (equació (4.4)).

Un cop determinada la decisió Bayes $d^*(\boldsymbol{x})$, podem determinar el risc Bayes $r(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\pi})$ (equació (4.3)), i risc Bayes mínim $\hat{r}(\boldsymbol{\pi})$ (equació (4.5)).

La regla de decisió minimax és la solució minimax de $(\mathcal{D},\Theta,R)$. En general, una mixtura de les decisions $\boldsymbol{d} \in \mathcal{D}$. Aquesta solució també dóna el valor del problema de decisió i la distribució menys favorable de l'estat de la natura. Per determinar el valor podem buscar $\pi_o = \arg\inf_\pi \hat{r}(\boldsymbol{\pi})$ i $V = \hat{r}(\boldsymbol{\pi}_o)$.

Apèndixs

A. Gradient

Definim el vector columna gradient d'una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \partial f(\boldsymbol{x})/\partial x_1 \\ \cdots \\ \partial f(\boldsymbol{x})/\partial x_n \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

La derivada d'una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en la direcció del vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es defineix com:

$$\nabla_{\mathbf{v}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}+\mathbf{v}) - f(\boldsymbol{x})}{} = \nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\, \mathbf{v} \tag{4.7}$$

La interpretació intuïtiva de la derivada direccional és la raó de variació de la funció f en en punt $\boldsymbol{x}$ en la direcció del vector $\mathbf{v}$. Per tant, la direcció del gradient és la de màxima variació de la funció $f(\boldsymbol{x})$.

En el cas d'una funció vectorial $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ g_2(\boldsymbol{x}) \\ \cdots \\ g_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

Definim el gradient com la matriu $n \times m$ on la columna j és el gradient de la funció $g_j(\boldsymbol{x})$:

$$\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \nabla g_1(\boldsymbol{x}) & \nabla g_2(\boldsymbol{x}) & \cdots & \nabla g_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Exemple 4.1 Gradient

Si $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{a} = \sum x_i\, a_i$, aleshores:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \nabla(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{a} \tag{4.9}$$

Si tenim la forma quadràtica $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{A}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{A}_H\, \boldsymbol{x}$, on $\mathbf{A}_H = 1/2(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})$ és una matriu simètrica. Tenim que: $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{A}_H\, \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{A}_H\, \boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}_H\, \boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{A}_H^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{A}_H\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{A}\, \boldsymbol{x}$. Per tant, aplicant la regla de la cadena i el resultat (4.9):

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \nabla(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{A}\, \boldsymbol{x}) = \mathbf{A}\, \boldsymbol{x} + \mathbf{A}\, \boldsymbol{x} = 2\, \mathbf{A}\, \boldsymbol{x} \tag{4.10}$$

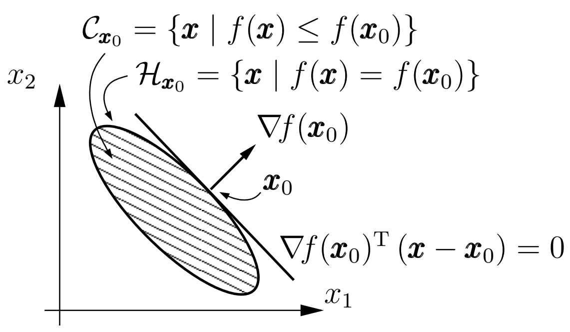

Figura 4.1: Relació entre el gradient $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$, hiperfície de nivell $\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}_0}$ i subconjunt de nivell $\mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0}$ d'una funció $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

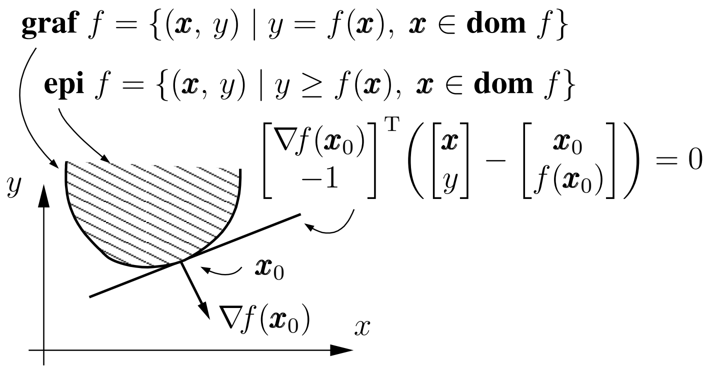

Figura 4.2: Relació entre el gradient, gràfic i epigràfic d'una funció $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Observacions

- El transposat de (4.8) és el Jacobià de $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$.
- Alguns autors defineixen el gradient d'una funció $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com un vector fila igual al transposat del vector (4.6). En aquest cas es defineix el gradient de la funció vectorial $\boldsymbol{g}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ com el transposat de la la matriu (4.8), és a dir, coincideix amb el Jacobià.

B. Hiperfície i subconjunt de nivell

Es diu hiperfície de nivell (o conjunt de nivell, *level set*) $\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}_0}$ d'una funció $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que passa per un punt $\boldsymbol{x}_0$ al conjunt (veure la figura 4.1):

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}_0} = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)\} \tag{4.11}$$

Si $n=2$ es diuen corbes de nivell, i si $n=3$ superfícies de nivell.

Si el gradient en un punt $\boldsymbol{x}_0$ és $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, aleshores $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ és un vector perpendicular a la hiperfície de nivell de la funció $f(\boldsymbol{x})$ en $\boldsymbol{x}_0$. Per tant, l'hiperplà tangent a la la hiperfície de nivell (4.11) en el punt $\boldsymbol{x}_0$ és:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = 0 \tag{4.12}$$

Es diu subconjunt de nivell (*sublevel set*) $\mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0}$ d'una funció $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que passa per un punt $\boldsymbol{x}_0$ al conjunt (veure la figura 4.1):

$$\mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0} = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_0)\} \tag{4.13}$$

És fàcil veure que si $f(\boldsymbol{x})$ és convexa, aleshores $\mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0}$ és un conjunt convex: Si $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0}$, aleshores $f(\alpha\,\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}_2) \leq \alpha\,f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\alpha)\,f(\boldsymbol{x}_2) \leq \alpha\,f(\boldsymbol{x}_0) + (1-\alpha)\,f(\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}_0) \Rightarrow f(\alpha\,\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}_2) \in \mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0}$. Així doncs, si $f(\boldsymbol{x})$ és convexa (4.12) és l'hiperplà suport de $\mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0}$ en $\boldsymbol{x}_0$ (veure la figura 4.1).

Notar que el gràfic d'una funció $f(\boldsymbol{x})$:

$$\textbf{graf}\ f = \{(\boldsymbol{x}, y) \mid y = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \textbf{dom}\ f\} \tag{4.14}$$

el podem interpretar com la hiperfície de nivell $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$ de la funció $F:\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $F(\boldsymbol{x}, y) = f(\boldsymbol{x}) - y$. Com que $\nabla F(\boldsymbol{x}, y) = \begin{bmatrix} \nabla f(\boldsymbol{x}) \\ -1 \end{bmatrix}$, aplicant (4.12) tenim que l'hiperplà tangent al gràfic (4.14) en el punt $(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0))$ és (veure la figura 4.2):

$$\begin{bmatrix} \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \\ -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ f(\boldsymbol{x}_0) \end{bmatrix} \right) = 0 \tag{4.15}$$

Notar també que si $f(\boldsymbol{x})$ és una funció convexa, aleshores (4.15) serà l'hiperplà suport de l'epigràfic de $f(\boldsymbol{x})$ en el punt $\boldsymbol{x}_0$ (veure la figura 4.2).

Bibliografia

[1] Francis J. Anscombe i Robert J. Aumann. A definition of subjective probability. *The annals of mathematical statistics*, 34(1):199–205, 1963.

[2] Ricardo Vélez Ibarrola. *Introducción a la Teoría de la Decisión*. UNED, 2012.

Quadre amb algunes distribucions

Distribució	Paràmetres	Funció de densitat	Mitjana	Variança	Funció característica
Bernoulli	$0 \leq p \leq 1$ $q = 1 - p$	$p^k\,(1-p)^{1-k}$ $k = 0{,}1$	p	$p\,(1-p)$	$q + p\,\mathrm{e}^{i\,t}$
Binomial	$0 \leq p \leq 1$ $q = 1 - p$	$\binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}$ $k = 0{,}1,\ldots n$	$n\,p$	$n\,p\,(1-p)$	$(q + p\,\mathrm{e}^{i\,t})^n$
Geomètrica	$0 \leq p \leq 1$ $q = 1 - p$	$p\,(1-p)^k$ $k \geq 0$	$\dfrac{1-p}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$\dfrac{p}{1 - q\,\mathrm{e}^{i\,t}}$
Binomial negativa	$r > 0$ $0 \leq p \leq 1$ $q = 1 - p$	$\binom{k+r-1}{k} p^r\,q^k$ $k \geq 0$	$r\,\dfrac{1-p}{p}$	$r\,\dfrac{1-p}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - q\,\mathrm{e}^{i\,t}}\right)^r$
Poisson	$\lambda > 0$	$\dfrac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k \geq 0$	λ	λ	$\exp\left\{\lambda\,(\mathrm{e}^{i\,t} - 1)\right\}$
Normal $N(\mu,\sigma)$	$\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma > 0$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma^2}}\,\exp\left\{\dfrac{-(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\right\}$ $x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2	$\exp\left\{\mu\,i\,t - \dfrac{t^2\,\sigma^2}{2}\right\}$
Uniforme	$a < b$	$\dfrac{1}{b-a}, \quad a < x < b$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{i\,t\,b} - \mathrm{e}^{i\,t\,a}}{i\,t\,(b-a)}$
Exponencial	α	$\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha\,x}, \quad x > 0$	$\dfrac{1}{\alpha}$	$\dfrac{1}{\alpha^2}$	$\left(1 - \dfrac{i\,t}{\alpha}\right)^{-1}$
Gamma $\gamma(n,\alpha)$	$\alpha > 0$, $n > 0$	$\dfrac{\alpha^n\,x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\alpha\,x}}{\Gamma(n)}, \quad x > 0$	$\dfrac{n}{\alpha}$	$\dfrac{n}{\alpha^2}$	$\left(1 - \dfrac{i\,t}{\alpha}\right)^{-n}$
Beta $\beta(p,q)$	$p > 0$, $q > 0$	$\dfrac{x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}}{\mathrm{B}(p,q)}$, $0 < x < 1$	$\dfrac{p}{p+q}$	$\dfrac{p\,q}{(p+q)^2(p+q+1)}$	
Cauchy	$a > 0$, $b \in \mathbb{R}$	$\dfrac{a}{\pi\,[a^2 + (x-b)^2]}$ $x \in \mathbb{R}$	No existeix	No existeix	$\mathrm{e}^{i\,t\,b - a\,\lvert t \rvert}$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt,\ \Gamma(n) = (n-1)! \quad \mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}\,dt,\ \mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$