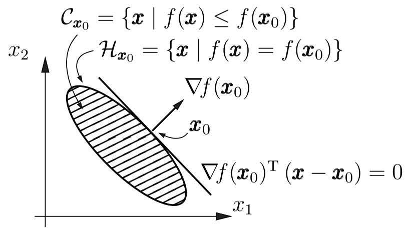


Figura 13.5: Relació entre el gradient $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$, hiperfície de nivell $\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}_0}$ i subconjunt de nivell $\mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0}$ d'una funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

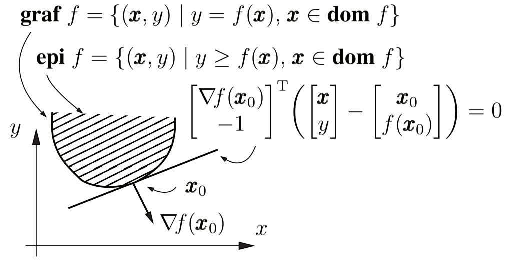


Figura 13.6: Relació entre el gradient, gràfic i epigràfic d'una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

on $\Re$ és la part real i $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}$ és el vector (o matriu) conjugat transposat: Si $x_{ij} = u + i\,v$, $x_{ji}^{\mathrm{H}} = u - i\,v$.

Es diu que una matriu $\mathbf{A}$ de números complexes és Hermítica si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}$. Notar que si tots els elements de $\mathbf{A}$ son reals, aleshores $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, i Hermítica és equivaler a simètrica: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Una condició necessària i suficient perquè una matriu $\mathbf{A}$ sigui definida positiva és que la seva "part Hermítica": $\mathbf{A}_H = 1/2(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{H}})$ sigui definida positiva. Notar que $\mathbf{A}_H$ és una matriu Hermítica.

Una condició necessària i suficient perquè una matriu Hermítica sigui definida positiva és que tots els seus autovalors siguin > 0. També és una condició necessària i suficient que tots els menors principals (menors superior-esquerra que es poden formar) tinguin determinant > 0.

Indicarem que una matriu és definida positiva com $\mathbf{A} > \mathbf{0}$. Si la matriu complexa $\Re[\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{x}] \geq 0$ es diu que és semidefinida positiva i ho indicarem com $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$.

Anàlogament, una matriu que compleix $\Re[\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{x}] < 0$, respectivament $\Re[\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{x}] \leq 0$, es diu definida negativa i semidefinida negativa (ho indicarem com $\mathbf{A} < \mathbf{0}$ i $\mathbf{A} \leq \mathbf{0}$ respectivament). Una condició necessària i suficient perquè una matriu Hermítica sigui definida negativa és que tots els seus autovalors siguin < 0. També és una condició necessària i suficient que tots els menors principals d'ordre k, $k = 1, 2, \cdots, n$ siguin negatius si k és senar, i positius si k és parell.

Una matriu que no és ni (semi)definida positiva ni negativa es diu que és indefinida.

Exemple 13.4 Matriu definida positiva

La matriu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ és definida positiva perquè la seva part Hermítica: $\mathbf{A}_H = 1/2(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{H}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$ és definida positiva (té els autovalors $+1$, $+1$). Efectivament: $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = x_1^2 + x_2^2 > 0$, $\forall \boldsymbol{x} \neq 0$. ∎

Bibliografia

[1] Francisco Javier Girón González-Torre i Miguel Ángel Gómez Villegas. *Teoría de los juegos, Tomo I*. Ediciones UNED, segona edició, 1990.

[2] Francisco Javier Girón González-Torre i Miguel Ángel Gómez Villegas. *Teoría de los juegos, Tomo II*. Ediciones UNED, segona edició, 1990.

[3] Stephen Boyd i Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.

[4] Wikipedia. Shapley value — wikipedia, the free encyclopedia, 2011.

Apunts de teoria de jocs

Llorenç Cerdà-Alabern
llorenc@ac.upc.edu
Barcelona, desembre de 2011.

Índex

Prefaci

Vaig escriure aquests apunts mentre preparava l'assignatura *teoría de los juegos* del curs 2010-11 de la carrera de matemàtiques de la UNED. Els apunts estan basats fonamentalment en el llibre de l'assignatura [1, 2]. El contingut no és rigorós ni complert, i només hi ha demostracions senzilles orientades a entendre o ajudar a memoritzar les relacions que demostren. L'edició l'he fet amb LaTeX.

Notació: Els vectors normalment es representen amb minúscules en negreta ($\boldsymbol{x}$). Poden ser vectors fila o columna, si no s'indica, es dedueix del context. En el cas de ser distribucions de probabilitat, corresponents a les estratègies mixtes en jocs bipersonals, normalment es farà servir la notació ξ per identificar un vector fila amb les estratègies del primer jugador, i η per identificar un vector columna amb les estratègies del segon jugador. Per als conjunts normalment es fan servir lletres majúscules cal·ligràfiques (com $\mathcal{X}$).

Capítol 1
Definició d'un joc

1.1 Ingredients d'un joc

Terminologia

- n jugadors $J_1, \cdots J_n$.
- **Conjunt d'informació** j d'un jugador J_i, K_i^j, $j \in \{1, \ldots n_j\}$: Informació de que disposa J_i abans de prendre una decisió.
- **Alternatives** d'un jugador J_i en un conjunt d'informació j, $I_i^j = \{\alpha_1^j, \cdots \alpha_{n_i}^j\}$: decisions que pot prendre J_i en el conjunt d'informació K_i^j.
- **Atzar** en cas d'haver-hi un conjunt d'informació on es prengui una decisió aleatòria, l'associarem a un jugador J_0 que representa l'atzar.
- **Estratègia pura** del jugador J_i, π_i: És una aplicació $\pi_i : (K_i^1, \cdots K_i^{n_j}) \to I_i^1 \times \cdots I_i^{n_j}$ que diu quina alternativa a de prendre J_i per a cada conjunt d'informació K_i^j.
- **Funció d'utilitat**, o pagament d'un jugador J_i (*payoff*), $M_i(\pi_1, \cdots \pi_n)$.

Representacions

- **Forma extensiva:** Arbre Γ on els vèrtexs són els conjunts d'informació, els arcs les alternatives, i en els arcs terminals hi ha els pagaments. Varis vèrtexs poden pertànyer a un mateix conjunt d'informació, si el jugador no pot distingir-los. Si això no passa es diu que el vèrtex és **d'informació perfecte**, i si tots ho són, és un **joc d'informació perfecte**.
- **Forma Normal:** Matrius on les columnes/files són les estratègies dels jugadors, i els elements són els pagaments.

Tupla d'equilibri Sigui Π_i el conjunt de les possibles estratègies del jugador J_i. Siguin π_{-i} les estratègies de tots jugadors excepte J_i. $\pi^* = (\pi_1^*, \cdots \pi_n^*)$ és una tupla d'equilibri si:

$$M_i(\pi^*) \geq M_i(\pi_{-i}^*, \pi_i), \quad \forall i, \pi_i \in \Pi_i \tag{1.1}$$

És a dir, cap jugador surt guanyant si fa servir una estratègia diferent de π^*.

1.2 Descomposició d'un joc

Sigui x un node d'informació perfecte d'un joc amb forma extensiva Γ. El joc es pot descompondre en dos jocs: Γ_x i $\Gamma_{/x}$, on x és l'arrel de Γ_x, i al node terminal x en $\Gamma_{/x}$ assignarem els pagaments que resultin de la tupla d'equilibri en Γ_x.

Resolució regressiva (*backward induction*) Podem trobar les tuples d'equilibri d'un joc descomponent un joc a partir de les últimes alternatives fins arribar a l'arrel del joc inicial.

Exemple 1.1 Joc en Forma extensiva i normal[1]

1. Dos jugadors aposten 10 euro i llancen una moneda (amb cares identificades per C i X). Cap jugador coneix el resultat de l'altra. J_1, que juga primer, no coneix el seu llançament, però J_2 si.
2. J_1 pot passar (P) o apostar 5 euro addicionals (5). Si passa es comparen les monedes. Qui ha tret cara guanya. Si són iguals cada jugador recupera els diners.
3. Si J_1 posa 5 euro, J_2 pot passar o apostar 5 euro addicionals. Si passa J_1 s'ho queda tot. Si aposta, qui ha tret cara guanya. Si són iguals cada jugador recupera els diners.

[1] Enunciat del primer problema de l'examen de l'UNED de febrer 2011, segona setmana.

En el cas d'una funció vectorial $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ g_2(\boldsymbol{x}) \\ \cdots \\ g_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

Definim el gradient com la matriu $n \times m$ on la columna j és el gradient de la funció $g_j(\boldsymbol{x})$:

$$\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \nabla g_1(\boldsymbol{x}) & \nabla g_2(\boldsymbol{x}) & \cdots & \nabla g_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \tag{13.36}$$

Exemple 13.3 Gradient
Si $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{a} = \sum x_i\, a_i$, aleshores:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \nabla(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{a} \tag{13.37}$$

Si tenim la forma quadràtica $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_H\, \boldsymbol{x}$, on $\mathbf{A}_H = 1/2(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})$ és una matriu simètrica (veure l'apèndix G). Tenim que: $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_H\, \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_H\, \boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}_H\, \boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_H^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_H\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}\, \boldsymbol{x}$. Per tant, aplicant la regla de la cadena i el resultat (13.37):

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \nabla(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}\, \boldsymbol{x}) = \mathbf{A}\, \boldsymbol{x} + \mathbf{A}\, \boldsymbol{x} = 2\, \mathbf{A}\, \boldsymbol{x} \tag{13.38}$$

■

Observacions

- El transposat de (13.36) és el Jacobià de $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$.
- Alguns autors defineixen el gradient d'una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com un vector fila igual al transposat del vector (13.34). En aquest cas es defineix el gradient de la funció vectorial $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ com el transposat de la la matriu (13.36), és a dir, coincideix amb el Jacobià.

E. Hiperfície i subconjunt de nivell

Es diu hiperfície de nivell (o conjunt de nivell, *level set*) $\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}_0}$ d'una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que passa per un punt $\boldsymbol{x}_0$ al conjunt (veure la figura 13.5):

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}_0} = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)\} \tag{13.39}$$

Si $n = 2$ es diuen corbes de nivell, i si $n = 3$ superfícies de nivell.

Si el gradient en un punt $\boldsymbol{x}_0$ és $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, aleshores $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ és un vector perpendicular a la hiperfície de nivell de la funció $f(\boldsymbol{x})$ en $\boldsymbol{x}_0$. Per tant, l'hiperplà tangent a la la hiperfície de nivell (13.39) en el punt $\boldsymbol{x}_0$ és:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0 \tag{13.40}$$

Es diu subconjunt de nivell (*sublevel set*) $\mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0}$ d'una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que passa per un punt $\boldsymbol{x}_0$ al conjunt (veure la figura 13.5):

$$\mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0} = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_0)\} \tag{13.41}$$

És fàcil veure que si $f(\boldsymbol{x})$ és convexa, aleshores $\mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0}$ és un conjunt convex: Si $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0}$, aleshores $f(\alpha\, \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\, \boldsymbol{x}_2) \leq \alpha\, f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\alpha)\, f(\boldsymbol{x}_2) \leq \alpha\, f(\boldsymbol{x}_0) + (1-\alpha)\, f(\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}_0) \Rightarrow f(\alpha\, \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\, \boldsymbol{x}_2) \in \mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0}$. Així doncs, si $f(\boldsymbol{x})$ és convexa (13.40) és l'hiperplà suport de $\mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0}$ en $\boldsymbol{x}_0$ (veure la figura 13.5).

Notar que el gràfic d'una funció $f(\boldsymbol{x})$:

$$\textbf{graf}\ f = \{(\boldsymbol{x}, y) \mid y = f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \textbf{dom}\ f\} \tag{13.42}$$

el podem interpretar com la hiperfície de nivell $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$ de la funció $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $F(\boldsymbol{x}, y) = f(\boldsymbol{x}) - y$. Com que $\nabla F(\boldsymbol{x}, y) = \begin{bmatrix} \nabla f(\boldsymbol{x}) \\ -1 \end{bmatrix}$, aplicant (13.40) tenim que l'hiperplà tangent al gràfic (13.42) en el punt $(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0))$ és (veure la figura 13.6):

$$\begin{bmatrix} \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \\ -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ f(\boldsymbol{x}_0) \end{bmatrix} \right) = 0 \tag{13.43}$$

Notar també que si $f(\boldsymbol{x})$ és una funció convexa, aleshores (13.43) serà l'hiperplà suport de l'epigràfic de $f(\boldsymbol{x})$ en el punt $\boldsymbol{x}_0$ (veure la figura 13.6).

F. Teorema de Taylor per funcions de vàries variables

Si la funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és diferenciable en una regió $\mathcal{D}$ que conté el segment $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2]$, aleshores existeix un $0 \leq \lambda \leq 1$ tal que:

$$f(\boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + \nabla f(\lambda\, \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\, \boldsymbol{x}_2)^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \tag{13.44}$$

Aquesta relació s'anomena també teorema de Lagrange o del valor mig. A més, si existeixen les derivades parcials de segon ordre, aleshores:

$$f(\boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + \nabla f(\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + 1/2\, (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}}\, \nabla^2 f(\lambda\, \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\, \boldsymbol{x}_2)\, (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \tag{13.45}$$

on $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ és el Hessià: $[\nabla^2 f(\boldsymbol{x})]_{ij} = \left[\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i\, \partial x_j}\right]$

G. Matrius definides positives

Una matriu $\mathbf{A}$ $n \times n$ de números complexes és definida positiva si la part real de la forma quadràtica associada a $\mathbf{A}$ és sempre positiu. És a dir:

$$\Re[\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\, \mathbf{A}\, \boldsymbol{x}] > 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, \boldsymbol{x} \neq 0 \tag{13.46}$$

Observacions

- La quasiconvexitat també es pot enunciar de la següent manera: Una funció f és quasiconvexa si i només si **dom** $f = \mathcal{D}$ és quasiconvex i:

$$f(\lambda\,\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\,\boldsymbol{x}_2) \leq \max\{f(\boldsymbol{x}_1),\, f(\boldsymbol{x}_2)\} \quad (13.29)$$

Alguns autors anomenen (13.29) com desigualtat de Jensen per funcions quasiconvexes (comparar amb (13.23), pàg. 31).

Exemple 13.1 Funció quasiconvexa
La funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x\,y$, **dom** $f = \mathbb{R}^2_+$ no és convexa ni còncava perquè el Hessià:

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

és una matriu indefinida (donat que té els autovalors $+1$, -1, veure l'apèndix G). f però, és quasicòncava en $\mathbb{R}^2_+$ perquè els superconjuts de nivell:

$$\{(x,y) \mid x\,y \geq \alpha, \quad \alpha, x, y \in \mathbb{R}_+\}$$

són conjunts convexes. Notar que en $\mathbb{R}^2_-$ f és quasiconvexa[1]. ∎

Exemple 13.2 Funció lineal fraccional
La funció:

$$f(x) = \frac{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + b}{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + d}, \quad \textbf{dom}\ f = \{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + d > 0\} \quad (13.30)$$

és quasiconvexa i quasicòncava (quan es compleixen aquestes dues condicions la funció es diu quasilineal), perquè els seus subconjunts de nivell: $\{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + b \leq \alpha(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + d),\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + d > 0\}$ son la intersecció d'un subespai obert i un subespai tancat, per tant, és un conjunt convex. Anàlogament es pot veure que els superconjunts de nivell també són conjunts convexes[1]. ∎

Teorema 13.12 Condició de quasiconvexitat de primer ordre
Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és diferenciable i quasiconvexa en el conjunt convex **dom** $f = \mathcal{D}$, aleshores:

$$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_0) \Rightarrow$$
$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \leq 0,\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D} \quad (13.31)$$

L'equació (13.31) té una interpretació geomètrica senzilla quan $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$: Defineix l'hiperplà suport del subconjunt de nivell $\{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_0)\}$ en el punt $\boldsymbol{x}_0$ (veure la figura 13.5, pàg. 36).

C.8 Funcions pseudoconvexes

Més endavant veurem que $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = 0$ és una condició necessària i suficient perquè $\boldsymbol{x}^*$ sigui el mínim global d'una funció convexa. Això no és cert per una funció quasiconvexa. Per exemple, $f(x) = x^3$ és una funció quasiconvexa, però $f'(0) = 0$, i $x_0 = 0$ és un punt d'inflexió. Per evitar aquest problema es diu que una funció f definida en un domini obert $\mathcal{D}$ és pseudoconvexa si és diferenciable en $\mathcal{D}$ i compleix:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \geq 0 \Rightarrow$$
$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_0)\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D} \quad (13.32)$$

Per exemple, la funció $f(x) = x^3 + x$ és pseudoconvexa perquè $f'(x_0)(x - x_0) = (2\,x_0^2 + 1)(x - x_0)$, que permet garantir la implicació (13.32). En canvi, la funció $f(x) = x^3$ no és pseudoconvexa perquè per $x_0 = 0$ tenim que $f'(0)(x-0) = 0$. Per tant, de $f'(0)(x-0) \geq 0$ no podem deduir que $f(x) \geq f(0)$.

C.9 Teorema del punt fix o de Brouwer

Un punt fix (*fixed point* o *fixpoint*) d'una funció és un punt que la funció mapa en ell mateix. És a dir:

$$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}) \quad (13.33)$$

Teorema 13.13 Teorema de Brouwer
Si $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ és una funció continua en un subconjunt $\mathcal{S}$ compacte de $\mathbb{R}^n$, aleshores f té almenys un punt fix.

El teorema de Kakutani generalitza el teorema de Brouwer per a una multiaplicació (*multivalued function*) en un conjunt convex compacte.

D. Gradient

Definim el vector columna gradient d'una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \partial f(\boldsymbol{x})/\partial x_1 \\ \cdots \\ \partial f(\boldsymbol{x})/\partial x_n \end{bmatrix} \quad (13.34)$$

La derivada d'una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en la direcció del vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es defineix com:

$$\nabla_{\mathbf{v}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \lambda\mathbf{v}) - f(\boldsymbol{x})}{\lambda} = \nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{v} \quad (13.35)$$

La interpretació intuïtiva de la derivada direccional és la raó de variació de la funció f en en punt $\boldsymbol{x}$ en la direcció del vector $\mathbf{v}$. Per tant, la direcció del gradient és la de màxima variació de la funció $f(\boldsymbol{x})$.

[1] Exemple agafat de [3].

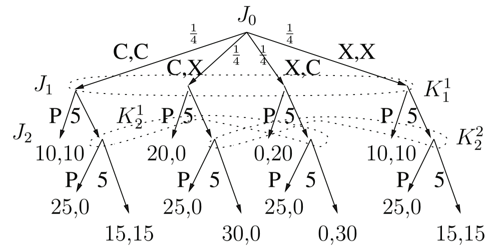


Figura 1.1: Joc en forma extensiva.

Solució La figura 1.1 mostra una representació del joc en forma extensiva. El primer jugador només té un conjunt d'informació K_1^1 i el segon jugador en té 2 (K_2^1 i K_2^2). Les alternatives en tots els conjunts d'informació són passar o apostar 5: $I_i^j = \{P, 5\}$. Els conjunts d'estratègies pures són: $\pi_1(K_1^1) \in I_1^1 = \{P,5\}$, $\pi_2(K_2^1,K_2^2) \in I_2^1 \times I_2^2 = \{(P,P), (P,5), (5,P), (5,5)\}$.
La matriu de pagaments (joc en forma normal) és:

J_1,J_2	(P,P)	$(P,5)$	$(5,P)$	$(5,5)$
P	$10;10$	$10;10$	$10;10$	$10;10$
5	$25;0$	$23'75;3'75$	$16'25;11'25$	$15;15$

on, per exemple:

$$M_1(5,(P,5)) = \frac{1}{4}(25 + 25 + 30 + 15) = 23'75$$
$$M_2(5,(P,5)) = \frac{1}{4}(0 + 0 + 0 + 15) = 3'75$$
$$M_1(5,(5,P)) = \frac{1}{4}(15 + 0 + 25 + 25) = 16'25$$
$$M_2(5,(5,P)) = \frac{1}{4}(15 + 30 + 0 + 0) = 11'25$$

Solució del joc fent servir el mètode de resolució regressiva:

- Si J_2 està en K_2^1 triarà l'estratègia 5, doncs el pagament serà $M_2(I_2^1 = 5 \mid K_2^1) = (15+30)/2 = 22'5$, metre que $M_2(I_2^1 = P \mid K_2^1) = (0+0)/2 = 0$. En aquest cas, $M_1(I_2^1 = 5 \mid K_2^1) = (15+0)/2 = 7'5$.
- Si J_2 està en K_2^2 triarà l'estratègia 5, doncs el pagament serà $M_2(I_2^2 = 5 \mid K_2^2) = (0+15)/2 = 7'5$. En aquest cas, $M_1(I_2^1 = 5 \mid K_2^1) = (30+15)/2 = 22'5$.
- Així doncs, J_1 sap que J_2 sempre triarà l'estratègia de jugar 5. Si J_1 juga P obté un pagament de 10 euro, mentre que si juga 5, donat que sap que J_2 jugarà 5, tindrà un pagament de $(7'5 + 22'5)/2 = 15$ euro. Per tant, J_1 també juga 5.

Així doncs, es conclou que la millor estratègia per els dos jugadors és jugar 5, amb un pagament de 15 euro per a cada jugador.. ∎

Capítol 2
Jocs bipersonals de suma zero

2.1 Definició

Els representarem per $\eth = (\mathcal{X}, \mathcal{Y}, M)$ on:

- $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ són els conjunts d'estratègies pures dels jugadors J_1,J_2.
- Si el primer i segon jugador trien una estratègia pura $x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$, el primer jugador té un benefici $M(x,y)$, i el segon $-M(x,y)$.

Equivalència de jocs $\eth' = (\mathcal{X}',\mathcal{Y},M')$ és una reducció de $\eth = (\mathcal{X},\mathcal{Y},M)$, i ho escrivim com $\eth'\,r\,\eth$ si hi ha una aplicació sobrejectiva[1] (*surjective*) $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ tal que $M'(f(x),y) = M(x,y)$, $\forall x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$. I anàlogament per $\mathcal{Y}$. Diem que $\eth$ i $\eth'$ són equivalents ($\eth \sim \eth'$) si hi ha una successió finita de jocs $\eth\,r\,\eth_1\,r \cdots \eth'$.

Jocs finits Diem que un joc és finit si els conjunts d'estratègies pures són finits: $\mathcal{X} = \{x_1, \cdots x_m\}$, $\mathcal{Y} = \{y_1, \cdots y_n\}$. En aquest cas podem numerar les estratègies pures amb un número natural: $\mathcal{X} = \{1, \cdots n\}$, $\mathcal{Y} = \{1, \cdots m\}$, i M queda caracteritzat per una matriu d'elements $M(x,y) = M(i,j) = a_{ij}$. Per tant, qualsevol joc finit és equivalent a un joc matricial en el que J_1 tria les files i J_2 tria les columnes. La representació d'un joc en la forma normal és un joc matricial. En el capítol 4 i posteriors el jocs matricials s'analitzen en detall.

2.2 Valor d'un joc

Suposem el joc $\eth = (\mathcal{X},\mathcal{Y},M)$. L'objectiu del J_1 és aconseguir el major M. El pitjor cas és que J_2 conegui l'estratègia de J_1, per tant, que J_2 jugui l'estratègia y donada per:

$$\Lambda(x) = \inf_{y \in \mathcal{Y}} M(x,y) \quad (2.1)$$

Notar que en el cas matricial, l'equació (2.1) equival a agafar per a cada fila $x = i$, el menor element: $min_j\, a_{ij}$. De (2.1) tenim que J_1 pot aconseguir el màxim M en el pitjor cas, λ^* (anomenat **valor pur inferior del joc**), amb l'estratègia x donada per:

$$\lambda^* = \sup_{x \in \mathcal{X}} \Lambda(x) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} M(x,y) \quad (2.2)$$

[1] és a dir, la imatge de f és igual al seu codomini: $\forall x' \in \mathcal{X}'\ \exists x \mid x' = f(x)$

Notar que en el cas matricial, l'equació (2.2) equival a buscar primer quin són els menors elements de les files, i després agafar el màxim: $\max_i \, min_j \, a_{ij}$.

Anàlogament, l'objectiu del J_2 és aconseguir el menor M (donat que el seu pagament és $-M$). El pitjor cas és que J_1 conegui l'estratègia de J_2, per tant, que J_1 jugui l'estratègia x donada per:

$$\gamma(y) = \sup_{x\in\mathcal{X}} M(x,y) \tag{2.3}$$

Per tant, J_2 garanteix el mínim M en el pitjor cas, ν^* (anomenat **valor superior** del joc), amb l'estratègia y donada per:

$$\nu^* = \inf_{y\in\mathcal{Y}} \gamma(y) = \inf_{y\in\mathcal{Y}} \sup_{x\in\mathcal{X}} M(x,y) \tag{2.4}$$

Notar que en el cas matricial, l'equació (2.4) equival a buscar primer quin són els majors elements de les columnes, i després agafar el mínim: $\min_j \, max_i \, a_{ij}$.

Evidentment:

$$\Lambda(x) = \inf_{y\in\mathcal{Y}} M(x,y) \le M(x,y) \le \gamma(y) = \sup_{x\in\mathcal{X}} M(x,y)$$

per tant:

$$\lambda^* = \sup_{x\in\mathcal{X}} \Lambda(x) \le \gamma(y)$$
$$\nu^* = \inf_{y\in\mathcal{Y}} \gamma(y) \ge \Lambda(x)$$

d'on:

$$\lambda^* \le \nu^* \tag{2.5}$$

Si es compleix $\lambda^* = \nu^*$ es diu que el joc està **estrictament determinat**, i el **valor del joc** és

$$v = \lambda^* = \nu^* \tag{2.6}$$

Les estratègies (x_o, y_o) tals que:

$$\Lambda(x_o) = \gamma(y_o) = v \tag{2.7}$$

s'anomenen **estratègies òptimes**. Notar que les estratègies (x_o, y_o) poden no ser úniques.

Si els jocs $\eth$ i $\eth'$ són equivalents, aleshores $v_\eth = v_{\eth'}$.

Punts de sella Es diu que x_o, y_o és un punt de sella si:

$$M(x,y_o) \le M(x_o,y_o) \le M(x_o,y)$$

Per tant, si J_2 tria y_o, el millor que pot fer J_1 és triar x_o. Anàlogament, si J_1 tria x_o, el millor que pot fer J_2 és triar y_o. Per tant, (x_o, y_o) són estratègies òptimes i $v = M(x_o,y_o)$ és el valor del joc.

Notar que en el cas matricial, tindrem un punt de sella quan (1) al buscar primer quin són els menors elements de les files, i després agafar el màxim, i (2) al buscar primer quin són els majors elements de les columnes, i després agafar el mínim, s'obté el mateix element. És a dir, quan hi ha un element que és simultàniament el mínim d'una fila i el màxim d'una columna.

Capítol 3
Extensió mixta

3.1 Definició

Definim les σ-àlgebra $\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y$ als conjunts que contenen tots els subconjunts discrets d'estratègies $\mathcal{X},\mathcal{Y}$, respectivament. És a dir, $\forall x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y} \Rightarrow x \in \mathcal{A}_x, y \in \mathcal{A}_y$.

Una **estratègia mixta**, ξ, de J_1 és una distribució de probabilitat definida sobre l'espai mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{A}_x)$. És a dir, $(\mathcal{X}, \mathcal{A}_x, \xi)$ és un espai de probabilitat:

$$\xi : \mathcal{A}_x \to [0,1]$$
$$\xi(\mathcal{X}) = 1$$
$$\xi\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi(A_i),$$
$$\forall A_i \in \mathcal{A}_x,\ A_n \cap A_m = \emptyset$$

Anàlogament definim una estratègia mixta η de J_2.

Aquesta definició genera una distribució de probabilitat sobre els valors de la funció de pagament M. Per simplificar, suposarem que aquesta variable aleatòria està ben definida (veure [1] per més detalls), i passarem a definir l'**extensió mixta del joc** $\eth = (\mathcal{X},\mathcal{Y},M)$ com $\eth_E = (\mathcal{X}^*,\mathcal{Y}^*,M)$, on $\mathcal{X}^*,\mathcal{Y}^*$ són els conjunts de possibles estratègies mixtes de J_1, J_2 en $\eth_E$. En $\eth_E$ definim M com:

$$\begin{aligned}
M(\xi,\eta) &= \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} M(x,y)\, d(\xi(x)\times\eta(y)) \\
&= \int_{\mathcal{X}}\int_{\mathcal{Y}} M(x,y)\, d\,\xi(x)\, d\,\eta(y) \\
&= \int_{\mathcal{X}}\left[\int_{\mathcal{Y}} M(x,y)\, d\,\eta(y)\right] d\,\xi(x) = \int_{\mathcal{X}} M(x,\eta)\, d\,\xi(x) \\
&= \int_{\mathcal{Y}}\left[\int_{\mathcal{X}} M(x,y)\, d\,\xi(x)\right] d\,\eta(y) = \int_{\mathcal{Y}} M(\xi,y)\, d\,\eta(y)
\end{aligned}$$

3.2 Propietats

- L'envolupant convexa de les estratègies pures, $\mathrm{Conv}\,\mathcal{X} \subset \mathcal{X}^*$. Això és una conseqüència del fet que $\mathcal{X}^*$ és un conjunt convex: $\xi,\xi' \in \mathcal{X}^* \Rightarrow \alpha\,\xi + (1-\alpha)\xi' \in \mathcal{X}^*$, i $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}^*$.

Notar que la definició de convexitat es pot interpretar dient que la interpolació lineal entre dos punts de la funció sobreestima el valor de la funció, mentre que (13.26) es pot interpretar dient que l'aproximació amb el pla tangent subestima el valor de la funció.

Teorema 13.11 Condició de convexitat de segon ordre
Una funció f dues vegades diferenciable en un conjunt obert convex Γ, és convexa si i només si:

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \ge \mathbf{0}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma \tag{13.27}$$

És a dir, si el Hessià de f és semidefinit positiu en Γ. Geomètricament, equival a dir que f té una corbatura "cap amunt" en Γ.

Demostració. Desenvolupant per Taylor (veure l'apèndix F):

$$f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) + 1/2\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x}+\alpha\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

per algun $0 \le \alpha \le 1$. D'aquí tenim que si el Hessià és una matriu semidefinida positiva en Γ, aleshores es complirà que $f(\boldsymbol{y}) \ge f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$, i per el teorema 13.10 podem afirmar que f és convexa. Per altra banda, si el Hessià no és una matriu semidefinida positiva, aleshores aquesta desigualtat no es complirà, i per el teorema 13.10 podrem afirmar que f no és convexa. □

C.5 Exemples de funcions convexes en $\mathbb{R}$

Funcions lineals i afins son convexes i còncaves alhora.

Exponencial $\mathrm{e}^{a\,x}$ és convexa en $\mathbb{R}$ per qualsevol $a \in \mathbb{R}$.

Potències x^a és convexa en $\mathbb{R}_{++}$ per $a \le 0$ o $a \ge 1$ i còncava per $0 \le a \le 1$.

Potències del valor absolut $|x|^p$ és convexa en $\mathbb{R}$ per $p \ge 1$.

Logaritme $\log x$ és còncava en $\mathbb{R}_{++}$ i $-\log x$ és convexa en $\mathbb{R}_{++}$.

Entropia negativa $x \log x$ és convexa en $\mathbb{R}_{++}$, o en $\mathbb{R}_+$ si imposem el valor 0 per $x = 0$.

C.6 Exemples de funcions convexes en $\mathbb{R}^n$

Normes totes les normes son convexes.

Màxim $f(\boldsymbol{x}) = \max\{x_1, \cdots x_n\}$ és convexa.

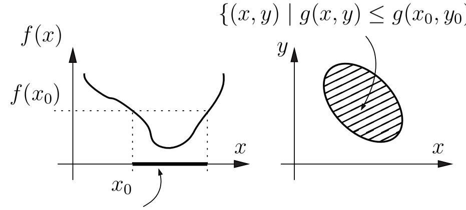
Raó entre una funció quadràtica i una lineal $f(x,y) = x^2/y$, **dom** $f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$ és convexa.

Logaritme de la suma d'exponencials $f(\boldsymbol{x}) = \log\{\mathrm{e}^{x_1} + \cdots \mathrm{e}^{x_n}\}$ és convexa.

Mitjana geomètrica $f(\boldsymbol{x}) = (\prod_{i=1}^n x_i)^{1/n}$, **dom** $f = \mathbb{R}^n_{++}$ és còncava.

Logaritme del determinant $f(\boldsymbol{x}) = \log\det \mathbf{X}$, **dom** $f = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} > 0\}$ és còncava.

$\mathcal{C}_{x_0,y_0} = \{(x,y) \mid g(x,y) \le g(x_0,y_0)\}$



$\mathcal{C}_{x_0} = \{x \mid f(x) \le f(x_0)\}$

Figura 13.4: Exemple d'un conjunt de nivell $\mathcal{C}_{x_0}$ i $\mathcal{C}_{x_0,y_0}$ d'una funció quasiconvexa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ respectivament.

C.7 Funcions quasiconvexes

Es diu subconjunt de nivell (*sublevel set*) $\mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0}$ d'una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que passa per un punt $\boldsymbol{x}_0$ al conjunt (veure la figura 13.4 i l'apèndix E):

$$\mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0} = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}_0)\} \tag{13.28}$$

Es diu que una funció f, **dom** $f = \mathcal{D}$ és quasiconvexa si $\mathcal{D}$ i tots els seus subconjunts de nivell $\mathcal{C}_{\boldsymbol{x}_0}, \boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D}$ son conjunts convexes. Una funció f es diu quasicòncava si $-f$ és quasiconvexa. En aquest cas, els seus "superconjunts de nivell", definits com $\{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) \ge f(\boldsymbol{x}_0)\}$, són conjunts convexes. Evidentment, una funció convexa també és quasiconvexa.

La desigualtat (13.23) es coneix com a desigualtat de Jensen.

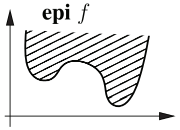


Figura 13.3: Epigràfic d'una funció.

Teorema 13.9 Epigràfic d'una funció convexa
Perquè una funció f definida sobre un conjunt convex Γ de $\mathbb{R}^n$ sigui convexa, és necessari i suficient que el seu epigràfic (veure la figura 13.3):

$$\textbf{epi}\, f = \{(\boldsymbol{x}, y) \mid \boldsymbol{x} \in \Gamma, y \geq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad (13.24)$$

sigui un conjunt convex de $\mathbb{R}^{n+1}$. Notar que $\{(\boldsymbol{x}, y) \mid \boldsymbol{x} \in \Gamma, y = f(x)\}$ és el gràfic de la funció $f(x)$. L'epigràfic és el conjunt de punts que queda per sobre del gràfic.

Una funció f definida sobre un conjunt convex Γ es còncava si $-f$ és convexa. En aquest cas, l'hipogràfic, definit com $\{(\boldsymbol{x}, y) \mid \boldsymbol{x} \in \Gamma, y \leq f(x)\}$ és un conjunt convex.

Podem considerar, doncs, l'epigràfic com el nexe d'unió entre els conjunts convexes i les funcions convexes: Les funcions convexes son aquelles en les que el seu epigràfic és un conjunt convex. En l'apèndix E s'explica com calcular l'hiperplà suport de l'epigràfic d'una funció convexa.

C.2 Funcions còncaves

Sigui Γ un conjunt convex de $\mathbb{R}^n$ i f una funció definida sobre Γ. Es diu que f és còncava si:

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Gamma \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2) \geq \\ \lambda f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}_2) \end{array} \quad (13.25)$$

Si la desigualtat és $>$, es diu estrictament còncava. Si f és convexa, $-f$ és còncava.

C.3 Operacions que preserven la convexitat

- Tota combinació lineal amb coeficients positius de funcions convexes és convexa.
- Si f_1 i f_2 son convexes i f_2 és no decreixent, aleshores $f_1 \cdot f_2$ és convexa.
- El superior d'una família finita de funcions convexes és una funció convexa.
- Si f_i és una successió de funcions convexes que convergeixen a una funció límit f, aleshores f és convexa.
- Composició afí: Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ i $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $g(\boldsymbol{x}) = f(\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{b})$, $\textbf{dom}\ g = \{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{A}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{b} \in \textbf{dom}\ f\}$. Aleshores si f és convexa/còncava, g també ho és.

C.4 Continuïtat i derivabilitat de funcions convexes

- Una funció convexa f és contínua en tots els punts interiors a l'interval on està definida.
- Perquè una funció derivable en un interval I sigui convexa, és necessari i suficient que la derivada f' sigui creixent en I.
- Si una funció f definida i dues vegades derivable en un interval I és positiva o zero en I, aleshores f és convexa.

Teorema 13.10 Condició de convexitat de primer ordre
Una funció f diferenciable en un conjunt obert convex Γ, és convexa si i només si ($\nabla f(\boldsymbol{x})$ és el gradient, veure l'apèndix D, pàg. 34):

$$f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \in \Gamma \quad (13.26)$$

Demostració. Sigui $\mathbf{z} = \alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}$; $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Gamma$. De (13.26) tenim:

$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} - \mathbf{z})$$
$$f(\boldsymbol{y}) \geq f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - \mathbf{z})$$

D'on:

$$\alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y}) \geq f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^{\mathrm{T}}(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} - \mathbf{z}) = f(\mathbf{z})$$

Que demostra que si es compleix (13.26), aleshores f és convexa. Demostració en sentit contrari: Per convexitat tenim que per $0 \leq \alpha \leq 1$: $f(\alpha\boldsymbol{y} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}) \leq \alpha f(\boldsymbol{y}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x})$. Per tant, per $0 < \alpha \leq 1$:

$$\frac{f(\boldsymbol{x} + \alpha(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) - f(\boldsymbol{x})}{\alpha} \leq f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})$$

d'on, agafant $\alpha \to 0$ tenim (13.26) (veure (13.35), pàg. 34), que demostra que si f és convexa es compleix (13.26). □

Teorema 3.1 Càlcul del valor inferior i superior d'$\Game_E$

$$\Lambda_{\Game_E}(\xi) = \inf_{\eta\in\mathcal{Y}^*} M(\xi,\eta) = \inf_{y\in\mathcal{Y}} M(\xi,y) \quad (3.1)$$
$$\gamma_{\Game_E}(\eta) = \sup_{\xi\in\mathcal{X}^*} M(\xi,\eta) = \sup_{x\in\mathcal{X}} M(x,\eta) \quad (3.2)$$

és a dir, basta calcular (3.1) i (3.2) sobre el conjunt d'estratègies pures d'un dels jugadors.

Demostració.

$$M(\xi,\eta) = \int_{\mathcal{Y}} M(\xi,y)\, d\,\eta(y) \geq \int_{\mathcal{Y}} \inf_{y\in\mathcal{Y}} M(\xi,y)\, d\,\eta(y) = \inf_{y\in\mathcal{Y}} M(\xi,y) \int_{\mathcal{Y}} d\eta(y) = \inf_{y\in\mathcal{Y}} M(\xi,y)$$

per tant: $\inf_{\eta\in\mathcal{Y}^*} M(\xi,\eta) \geq \inf_{y\in\mathcal{Y}} M(\xi,y)$. D'altra banda, com que $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}^*$: $\inf_{y\in\mathcal{Y}} M(\xi,y) \geq \inf_{\eta\in\mathcal{Y}^*} M(\xi,\eta)$, que confirma l'expressió per $\Lambda_{\Game_E}(\xi)$ en (3.1). De forma anàloga es faria per $\gamma_{\Game_E}(\eta)$. □

Igual que en 2.2, definim el valor inferior $\lambda^*_{\Game_E}$, i superior $\nu^*_{\Game_E}$ de $\Game_E$:

$$\lambda^*_{\Game_E} = \sup_{\xi\in\mathcal{X}^*} \Lambda_{\Game_E}(\xi) = \sup_{\xi\in\mathcal{X}^*} \inf_{y\in\mathcal{Y}} M(\xi,y)$$
$$\nu^*_{\Game_E} = \inf_{\eta\in\mathcal{Y}^*} \gamma_{\Game_E}(\eta) = \inf_{\eta\in\mathcal{Y}^*} \sup_{x\in\mathcal{X}} M(x,\eta)$$

com que $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}^*$ i $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}^*$, tenim que:

$$\lambda^*_{\Game} \leq \lambda^*_{\Game_E}$$
$$\nu^*_{\Game} \geq \nu^*_{\Game_E}$$

per tant:

$$\lambda^*_{\Game} \leq \lambda^*_{\Game_E} \leq \nu^*_{\Game_E} \leq \nu^*_{\Game} \quad (3.3)$$

que implica que si $\Game$ està estrictament determinat ($\lambda^*_{\Game} = \nu^*_{\Game}$) amb solucions òptimes pures, també ho estarà $\Game_E$ amb el mateix valor, i les solucions òptimes pures de $\Game$ també o seran de $\Game_E$.

Solució mixta d'un joc Si l'extensió mixta $\Game_E$ d'un joc $\Game$ compleix:

$$\lambda^*_{\Game_E} = \nu^*_{\Game_E} = v$$
$$\Lambda_{\Game_E}(\xi_o) = v$$
$$\gamma_{\Game_E}(\eta_o) = v$$

direm que el joc $\Game$ té el valor v, ξ_o és una estratègia maximín de J_1 i η_o és una estratègia minimàx de J_2. ξ_o i η_o són estratègies òptimes del joc $\Game$.

Capítol 4

Jocs matricials

4.1 Definició

Ho definirem com un joc finit bipersonal de suma zero $\Game = (\mathcal{X},\mathcal{Y},A)$ on numerem les estratègies pures amb un número natural: $\mathcal{X} = \{1, \cdots m\}$, $\mathcal{Y} = \{1, \cdots n\}$, i la matriu $A^{m\times n}$ són els pagaments de J_1: $M(x,y) = M(i,j) = a_{ij}$. És a dir, en estratègies pures J_1 tria una fila i J_2 tria una columna de la matriu A. Clarament:

$$\Lambda(x) = \Lambda(i) = \inf_{j\in\mathcal{Y}} M(i,j) = \min_j a_{ij}$$
$$\gamma(y) = \gamma(j) = \sup_{i\in\mathcal{X}} M(i,j) = \max_i a_{ij}$$

i el valor inferior, λ^*, i superior, ν^*, del joc en estratègies pures serà:

$$\lambda^* = \sup_{i\in\mathcal{X}} \Lambda(i) = \max_i \min_j a_{ij} \quad (4.1)$$
$$\nu^* = \inf_{j\in\mathcal{Y}} \gamma(j) = \min_j \max_i a_{ij} \quad (4.2)$$

Punt de sella És un element $a_{i^*j^*}$ que és el mínim d'una fila i^* i màxim d'una columna j^* simultàniament. És a dir:

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

De (4.1) i (4.1) tenim que si $a_{i^*j^*}$ és un punt de sella, aleshores el joc té valor $v = a_{i^*j^*}$ i i^*, j^* són estratègies òptimes pures dels jugadors. Si la matriu A no té punts de sella, aleshores hem de buscar solucions mixtes del joc.

4.2 Extensió mixta d'un joc matricial

Aplicant l'extensió mixta al joc matricial definit en 4.1 (veure 3.1), tenim que $\Game_E = (\mathcal{X}^*,\mathcal{Y}^*,M)$ on:

$$\mathcal{X}^* = \{\xi = (x_1, \cdots x_m);\ x_i \geq 0;\ \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$$
$$\mathcal{Y}^* = \{\eta = (y_1, \cdots y_n);\ y_j \geq 0;\ \sum_{j=1}^n y_j = 1\}$$
$$M(\xi,\eta) = \xi\, A\, \eta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i\, a_{ij}\, y_j$$

on suposem que ξ és un vector fila i η un vector columna. Així doncs, els conjunts $\mathcal{X}^*, \mathcal{Y}^*$ són els símplexs iguals a les envolupants convexes de les estratègies pures dels jugadors. La interpretació és que J_1 tria cada fila amb les probabilitats donades per ξ, i J_2 tria les columnes amb les probabilitats donades per η.

Tenint en compte (3.1) i (3.2) tenim que:

$$\Lambda(\xi) = \inf_{y\in\mathcal{Y}} M(\xi,y) = \min_j\{\xi\, C_j\} \tag{4.3}$$
$$\gamma(\eta) = \sup_{x\in\mathcal{X}} M(x,\eta) = \max_i\{F_i\, \eta\} \tag{4.4}$$

on C_j i F_i són les columnes i les files de la matriu de pagaments del joc, A, respectivament. L'explicació intuïtiva de (4.3) i (4.4) és la següent: $\Lambda(\xi) = \min_{\eta\in\mathcal{Y}^*} \xi\, A\, \eta = \min_{\eta\in\mathcal{Y}^*}(\xi\, A)\eta$ és la combinació convexa η de les quantitats $(\xi\, C_1, \cdots \xi\, C_m)$. Però, tenint en compte que això és la mitjana segons la distribució de probabilitat η d'aquestes quantitats, aquesta haurà de ser major o igual que el menor dels valors $(\xi\, C_1, \cdots \xi\, C_m)$. I de forma anàloga per $\gamma(\eta)$.

4.3 Teorema del minimàx

Teorema 4.1 Teorema del minimàx
Qualsevol joc bipersonal de suma zero amb estratègies finites (és a dir, un joc matricial) té solució en estratègies mixtes. És a dir, existeixen estratègies òptimes dels jugadors ξ_o, η_o tals que:

$$\xi\, A\, \eta_o \le \xi_o\, A\, \eta_o \le \xi_o\, A\, \eta \tag{4.5}$$

on $v = \xi_o\, A\, \eta_o$ és el valor del joc. Tenint en compte (4.3) i (4.4), les estratègies òptimes dels jugadors satisfan:

$$F_i\, \eta_o \le \xi_o\, A\, \eta_o \le \xi_o\, C_j,\ \forall i,j \tag{4.6}$$

Aquest teorema també es pot enunciar dient que la funció: $M(\xi,\eta) = \xi\, A\, \eta$ té un punt de sella ξ_o, η_o on:

$$\max_{\xi\in\mathcal{X}^*} \min_{\eta\in\mathcal{Y}^*} M(\xi,\eta) = M(\xi_o,\eta_o) = \min_{\eta\in\mathcal{Y}^*} \max_{\xi\in\mathcal{X}^*} M(\xi,\eta) \tag{4.7}$$

Les estratègies òptimes poden no ser úniques. A partir d'ara es farà servir la notació $O(J_1,A)$ i $O(J_2,A)$ per referir-se al conjunts d'estratègies òptimes de J_1 i J_2, respectivament.

A continuació s'esbossen 2 demostracions del teorema. Farem servir la notació $\partial = (\mathcal{X},\mathcal{Y},M)$, amb $M(i,j) = a_{ij}$, i $\partial_E = (\mathcal{X}^*,\mathcal{Y}^*,M)$, amb $M(\xi,\eta) = \xi\, A\, \eta$, per el joc en estratègies pures i la seva extensió mixta, respectivament.

4.3.1 Primera demostració

Considerem el joc $\partial_\mathcal{S} = (\mathcal{X}^*,\mathcal{S}^*,M_\mathcal{S})$ on:

$$\mathcal{S}^* = \text{Conv}\,\{C_1, \cdots C_n\} \tag{4.8}$$
$$M_\mathcal{S}(\xi,\boldsymbol{s}) = \xi \cdot \boldsymbol{s} \tag{4.9}$$

és a dir, el conjunt $\mathcal{S}^*$ és l'envolupant convexa generada per les columnes de A. Clarament, ∂_E i $\partial_\mathcal{S}$ són jocs equivalents. Per $\partial_\mathcal{S}$ tenim:

$$\Lambda_\mathcal{S}(\xi) = \inf_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{S}^*} M_\mathcal{S}(\xi,\boldsymbol{s}) = \min_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{S}^*} \xi\cdot\boldsymbol{s} \tag{4.10}$$
$$\gamma_\mathcal{S}(\boldsymbol{s}) = \sup_{\xi\in\mathcal{X}^*} M_\mathcal{S}(\xi,\boldsymbol{s}) = \max_{x\in\mathcal{X}} M_\mathcal{S}(x,\boldsymbol{s}) = \max_i\{\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{s}\} = \max_i\{s_i\} \tag{4.11}$$

on $\boldsymbol{u}_i = (0,\cdots \underbrace{1}_{i}, \cdots 0)$. El valors inferior $\lambda^*_\mathcal{S}$ i superior $\nu^*_\mathcal{S}$ del joc són:

$$\lambda^*_\mathcal{S} = \max_{\xi\in\mathcal{X}^*} \Lambda_\mathcal{S}(\xi)$$
$$\nu^*_\mathcal{S} = \min_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{S}} \gamma_\mathcal{S}(\boldsymbol{s}) = \min_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{S}} \max_i\{s_i\}$$

Sigui $\mathcal{T} = \{\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n \mid \max_i\{t_i\} < \nu^*_\mathcal{S}\}$. $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}^*$ són convexes i disjunts, doncs si $\boldsymbol{s} \in \mathcal{S}^*$, aleshores $\nu^*_\mathcal{S} = \min_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{S}^*}\max_i\{s_i\} \le \max_i\{s_i\}$, que és incompatible amb $\nu^*_\mathcal{S} > \max_i\{t_i\}$. Per tant, existeix un hiperplà $H(\boldsymbol{u},c)$ que separa $\mathcal{S}^*,\mathcal{T}$:

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{s} \ge c,\ \forall \boldsymbol{s}\in\mathcal{S}^*$$
$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t} \le c,\ \forall \boldsymbol{t}\in\mathcal{T}$$

d'on tenim que $\xi_o = \boldsymbol{u}/\sum_i u_i$ és una estratègia òptima de J_1 i $v = c/\sum_i u_i$ és el valor del joc. Un punt $\boldsymbol{s}_o$ de l'hiperplà $H(\boldsymbol{u},c)$ en la frontera de $\mathcal{S}^*,\mathcal{T}$ serà una solució òptima de J_2 en el joc $\partial_\mathcal{S}$. Per tant, una estratègia òptima de J_2 en ∂ vindrà donada per $\eta = (y_1, \cdots y_n)$ tal que $\boldsymbol{s}_o = \sum_i y_i\, C_i$, on C_i són les columnes de la matriu A. ■

4.3.2 Segona demostració

Siguin les funcions de pagament quan els jugador J_1 i J_2 fan servir les estratègies pures i i j, respectivament:

$$M(i,\eta) = F_i\cdot\eta$$
$$M(\xi,j) = \xi\cdot C_j$$

on F_i,C_j són la fila i i columna j de la matriu del joc, respectivament. Definim les funcions:

$$c_i(\xi,\eta) = \max\{0, M(i,\eta) - M(\xi,\eta)\}$$
$$d_j(\xi,\eta) = -\min\{0, M(\xi,j) - M(\xi,\eta)\} = \max\{0, M(\xi,\eta) - M(\xi,j)\}$$

Teorema 13.3 Hiperplà suport
Donat un conjunt convex Γ, es diu hiperplà suport de Γ a l'hiperplà que té intersecció no buida amb Γ tal que Γ està contingut en un dels semiespais determinats per l'hiperplà. És a dir, si $\hat{\boldsymbol{x}}$ és un vector que no pertany a l'interior de Γ, aleshores existeix un vector $\mathbf{c} \ne 0$ tal que:

$$\mathbf{c}^\mathrm{T}\boldsymbol{x} \ge \mathbf{c}^\mathrm{T}\hat{\boldsymbol{x}} \quad \forall\boldsymbol{x}\in\Gamma$$

Si Γ és un conjunt convex compacte (tancat i acotat), aleshores qualsevol hiperplà suport de Γ té almenys un punt extrem de Γ.

Teorema 13.4 Intersecció de conjunts convexes
Si $\Gamma_i, i\in\mathcal{I}$ és una família de conjunts convexes en $\mathbb{R}^n$, $\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\Gamma_i$ és un conjunt convex.

Teorema 13.5 Combinació convexa de punts
Si Γ és un conjunt convex, aleshores qualsevol combinació convexa de m punts de Γ pertany a Γ.

Teorema 13.6 Teorema de Caratheodory
Sigui un conjunt arbitrari $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$, aleshores, qualsevol punt $x\in\Gamma$ es pot expressar com a la combinació convexa de $n+1$ punts de Γ.

B.4 Teoremes d'alternatives

Teorema 13.7 Lema de Farkas
Sigui $\mathbf{A}$ una matriu $m\times n$ i $\mathbf{b}$ un vector, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$. Aleshores es compleix exactament una de les dues alternatives següents:

1. Existeix un vector $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ i $\boldsymbol{x}\ge\mathbf{0}$.
2. Existeix un vector $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$ tal que $\mathbf{A}^\mathrm{T}\boldsymbol{y}\ge\mathbf{0}$ i $\mathbf{b}^\mathrm{T}\boldsymbol{y} < 0$.

Interpretació geomètrica: Siguin $\mathbf{a}_1,\cdots\mathbf{a}_n$ les columnes de $\mathbf{A}$. La condició 1 implica que el vector $\mathbf{b}$ és una combinació cònica dels vectors $\mathbf{a}_i$ (veure la figura 13.2.(a)). La condició 1 vol dir que hi ha un vector $\boldsymbol{y}$ que fa menys de 90^o amb els vectors $\mathbf{a}_i$ i més de 90^o amb el vector $\mathbf{b}$. Per tant, existeix un hiperplà perpendicular al vector $\boldsymbol{y}$ que separa el vector $\mathbf{b}$ del con format pels vectors $\mathbf{a}_i$ (veure la figura 13.2.(b)).

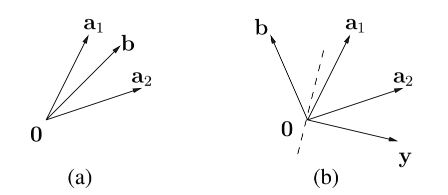


Figura 13.2: Interpretació geomètrica del teorema de Farkas.

Existeixen nombroses variacions del teorema de Farkas. La taula 13.1 en mostra algunes.

Alternativa 1	Alternativa 2	Nom
$\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$, $\boldsymbol{x}\ge\mathbf{0}$	$\mathbf{A}^\mathrm{T}\boldsymbol{y}\ge\mathbf{0}$, $\mathbf{b}^\mathrm{T}\boldsymbol{y} < 0$	Farkas
$\mathbf{A}\,\boldsymbol{x}\le\mathbf{b}$, $\boldsymbol{x}\ge\mathbf{0}$	$\mathbf{A}^\mathrm{T}\boldsymbol{y}\ge\mathbf{0}$, $\mathbf{b}^\mathrm{T}\boldsymbol{y} < 0$, $\boldsymbol{y}\ge\mathbf{0}$	Gale
$\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$	$\mathbf{A}^\mathrm{T}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{y}\ge\mathbf{0}$, $\boldsymbol{y}\ne\mathbf{0}$	Gordan
$\mathbf{A}_1\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$, $\mathbf{A}_2\boldsymbol{x}\le\mathbf{0}$	$\mathbf{A}_1^\mathrm{T}\boldsymbol{y}_1 + \mathbf{A}_2^\mathrm{T}\boldsymbol{y}_2 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{y}_1\ge\mathbf{0}, \boldsymbol{y}_1\ne\mathbf{0}$, $\boldsymbol{y}_2\ge\mathbf{0}$	Motzkin

Taula 13.1: Alguns teoremes d'alternatives.

C. Funcions convexes

C.1 Funcions convexes

Sigui Γ un conjunt convex de $\mathbb{R}^n$ i f una funció definida sobre Γ. Es diu que f és convexa si:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\Gamma\\ 0\le\lambda\le1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(\lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2) \le \\ \lambda\, f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda)\, f(\boldsymbol{x}_2)\end{array} \tag{13.21}$$

Si la desigualtat és $<$, es diu estrictament convexa.

Teorema 13.8 Desigualtat de Jensen

L'equació (13.21) es pot generalitzar fàcilment a qualsevol combinació convexa de punts de Γ. És a dir, si $\boldsymbol{x}_1,\cdots\boldsymbol{x}_n\in\Gamma$ i $0\le\lambda_i\le1$, $\sum_i\lambda_i = 1$, $i = 1,\cdots n$, aleshores f és convexa si:

$$f(\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots\lambda_n\boldsymbol{x}_2) \le \lambda_1\, f(\boldsymbol{x}_1) + \cdots\lambda_n\, f(\boldsymbol{x}_n)$$

També podem agafar un conjunt infinit de punts de Γ, de manera que per qualsevol funció $p(\boldsymbol{x})\ge0$, $\mathcal{D}\subseteq\Gamma$, $\int_\mathcal{D} p(\boldsymbol{x}) = 1$, aleshores f és convexa si:

$$f\left(\int_\mathcal{D} p(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{x}\right) \le \int_\mathcal{D} p(\boldsymbol{x})\, f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \tag{13.22}$$

Podem interpretar $p(\boldsymbol{x})$ com una funció densitat de probabilitat. Per tant, la desigualtat (13.22) es pot enunciar de la següent manera: Si $\boldsymbol{x}$ és una variable aleatòria i $\boldsymbol{x}\in\mathbf{dom}\ f$ amb probabilitat 1, aleshores per a qualsevol funció convexa f:

$$f(\mathrm{E}\boldsymbol{x}) \le \mathrm{E}f(\boldsymbol{x}) \tag{13.23}$$

Con semidefinit positiu Farem servir la notació $\mathbf{S}^n$, $\mathbf{S}^n_+$ i $\mathbf{S}^n_{++}$ per referir-nos respectivament al conjunt de matrius simètriques, semidefinides positives i definides positives (veure l'apèndix G). El conjunt $\mathbf{S}^n_+$ és un con convex de dimensió $n\,(n+1)/2$ anomenat "con semidefinit positiu".

Hiperplà És el conjunt:

$$\{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \alpha;\ \mathbf{c},\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; \alpha \in \mathbb{R}\} \tag{13.19}$$

Si expressem l'equació (13.19) com:

$$\{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = 0;\ \mathbf{c},\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0 = \alpha\}$$

l'hiperplà es pot interpretar geomètricament com el conjunt de vectors amb origen $\boldsymbol{x}_0$ normals al vector $\mathbf{c}$. Una definició equivalent és que un hiperplà en $\mathbb{R}^n$ és un subespai afí de dimensió $n-1$.

Polítops i polìedres Un polítop $\mathcal{P}$ és un conjunt de $\mathbb{R}^n$ intersecció d'un número finit de semiespais tancats i hiperplans:

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le b_j, j = 1,\cdots n;\\ \mathbf{c}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = d_j, j = 1,\cdots p;\ \boldsymbol{x},\mathbf{a}_j,\mathbf{c}_j, \in \mathbb{R}^n\}$$

Si el polítop és acotat s'anomena políedre. Ambdós son convexes. Per exemple, la figura 13.1 mostra el políedre:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

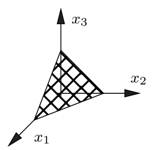


Figura 13.1: Políedre $x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_i \ge 0$

Símplex Siguin $m+1$ punts diferents: $\boldsymbol{x}_0,\cdots \boldsymbol{x}_m \in \mathbb{R}^n$. El conjunt Γ de totes les combinacions convexes d'aquests punts s'anomena símplex amb vèrtexs $\boldsymbol{x}_i$:

$$\Gamma = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \boldsymbol{x}_i;\ 0 \le \lambda_i \le 1;\ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1\}$$

Bolla Euclídea Una bolla Euclídea, o simplement bolla, de centre $\boldsymbol{x}_c$ i radi r en $\mathbb{R}^n$ és:

$$B(\boldsymbol{x}_c, r) = \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_c\|_2 \le r\} =\\ \{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_c)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_c) \le r^2\} =\\ \{\boldsymbol{x}_c + r\,\boldsymbol{u} \mid \|\boldsymbol{u}\|_2 \le 1\}$$

El·lipsoide Un el·lipsoide és:

$$E = \{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_c)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{P}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_c) \le 1\} =\\ \{\boldsymbol{x}_c + \mathbf{A}\,\boldsymbol{u} \mid \|\boldsymbol{u}\|_2 \le 1, \mathbf{A}^2 = \mathbf{P}\} \tag{13.20}$$

On les matrius $\mathbf{P}$ i $\mathbf{A}$ son simètriques i semidefinides positives. La mida dels semieixos és $\sqrt{\lambda_i}$, on λ_i son els autovalors de $\mathbf{P}$.

B.2 Operacions amb conjunts convexes

Suma

$$\Gamma + \Lambda = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x} \in \Gamma,\ \boldsymbol{y} \in \Lambda\}$$

Notar que:

$$\Gamma - \Lambda = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x} \in \Gamma,\ \boldsymbol{y} \in \Lambda\}$$

Producte per un escalar

$$\lambda\,\Gamma = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} = \lambda\,\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \in \Gamma\}$$

B.3 Teoremes sobre conjunts convexes

Teorema 13.1 Operacions amb conjunts convexes que preserven la convexitat
Les següents operacions amb els conjunts convexes Γ i Λ , donen lloc a un conjunt convex:

- Intersecció $\Gamma \cap \Lambda$.
- Suma $\Gamma + \Lambda$.
- Diferència $\Gamma - \Lambda$.
- Producte per un escalar $\lambda\,\Gamma$.
- Translació $\boldsymbol{x} + \Gamma$.
- Combinació lineal $\lambda\,\Gamma + \mu\,\Lambda$.
- Combinació afí. Donada la funció afí $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{b}$, la imatge del conjunt convex Γ al aplicar f: $f(\Gamma) = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \Gamma\}$.

Teorema 13.2 Separació de conjunts convexes
Un hiperplà $\{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \alpha\}$ separa dos conjunts Γ, Λ si

$$\boldsymbol{x} \in \Gamma \Rightarrow \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le \alpha$$
$$\boldsymbol{x} \in \Lambda \Rightarrow \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \ge \alpha$$

És a dir:

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 \le \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 \quad \forall \boldsymbol{x}_1 \in \Gamma,\ \boldsymbol{x}_2 \in \Lambda$$

Si les desigualtats son $<, >$, es diu que l'hiperplà separa estrictament els conjunts.

Si Γ, Λ son dos conjunts convexes no buits, existeix un hiperplà que els separa. De fet, si $\mathbf{a} \in \Gamma$ i $\mathbf{b} \in \Lambda$ son dos punts de distància mínima, aleshores l'hiperplà que passa pel seu punt mig és: $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{x} = \alpha$, on $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ i $\alpha = (\|\mathbf{a}\|_2^2 - \|\mathbf{b}\|_2^2)/2$

Siguin $\xi = (x_1,\cdots x_m)$, $\eta = (y_1,\cdots y_n)$. Definim la funció $f : \mathcal{X}^* \times \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^* \times \mathcal{Y}^*$, $f(\xi,\eta) = (\xi',\eta')$, $\xi' = (x'_1,\cdots x'_m)$, $\eta' = (y'_1,\cdots y'_n)$, on:

$$x'_i = \frac{x_i + c_i(\xi,\eta)}{1+\sum_{i=1}^m c_i(\xi,\eta)},\ i = 1,\cdots m$$
$$y'_j = \frac{y_i + d_i(\xi,\eta)}{1+\sum_{j=1}^n d_j(\xi,\eta)},\ j = 1,\cdots n$$

La funció f compleix les condicions del teorema del punt fix de Brouwer (veure l'apèndix C.9, pàg. 34), per tant, hi ha d'haver almenys un punt $\xi_o = (x_1^o,\cdots x_m^o)$, $\eta_o = (y_1^o,\cdots y_n^o)$ tal que $(\xi_o,\eta_o) = f(\xi_o,\eta_o) = (\xi'_o,\eta'_o)$, per tant:

$$x_i^o = \frac{x_i^o + c_i(\xi_o,\eta_o)}{1+\sum_{i=1}^m c_i(\xi_o,\eta_o)},\ i = 1,\cdots m$$
$$y_j^o = \frac{y_i^o + d_i(\xi_o,\eta_o)}{1+\sum_{j=1}^n d_j(\xi_o,\eta_o)},\ j = 1,\cdots n$$

Veiem que es compleix:

$$c_i(\xi_o,\eta_o) = 0, \qquad i = 1,\cdots,m \tag{4.12}$$
$$d_j(\xi_o,\eta_o) = 0, \qquad j = 1,\cdots,n \tag{4.13}$$

Demostrarem la primera igualtat, doncs l'altra és anàloga. Comencem per provar que existeix un k tal que $c_k(\xi_o,\eta_o) = 0$. Per definició, tenim que:

$$M(\xi_o,\eta_o) = \sum_{i=1}^m x_i^o\,M(i,\eta_o) \Rightarrow$$
$$\sum_{i=1}^m x_i^o(M(i,\eta_o) - M(\xi_o,\eta_o)) = 0$$

que implica que almenys un dels parèntesis haurà de ser negatiu (p.e. el que té l'índex $i = k$). De la definició tenim que per aquest índex haurà de ser: $c_k(\xi_o,\eta_o) = 0$. Ara bé, per aquest índex es té:

$$x_k^o = \frac{x_k^o + 0}{1+\sum_{i=1}^m c_i(\xi_o,\eta_o)}$$

que implica: $\sum_{i=1}^m c_i(\xi_o,\eta_o) = 0$. Com que les c_i són no negatives, es té que ha de ser: $c_i(\xi_o,\eta_o) = 0$, $i = 1,\cdots,m$, amb el que (4.12) queda provat.

De la definició es té que (4.12) i (4.13) impliquen:

$$M(i,\eta_o) - M(\xi_o,\eta_o) \le 0, \qquad i = 1,\cdots,m$$
$$M(\xi_o,j) - M(\xi_o,\eta_o) \ge 0, \qquad j = 1,\cdots,n$$

Multiplicant les expressions anteriors per x_i i y_i, respectivament, i sumant es té:

$$M(\xi,\eta_o) - M(\xi_o,\eta_o) \le 0, \qquad \forall \xi \in \mathcal{X}^*$$
$$M(\xi_o,\eta) - M(\xi_o,\eta_o) \ge 0, \qquad \forall \eta \in \mathcal{Y}^*$$

que implica: $M(\xi,\eta_o) \le M(\xi_o,\eta_o) \le M(\xi_o,\eta)$. D'on es conclou que (ξ_o,η_o) és un punt de sella, i per tant, una solució òptima del joc. ■

4.4 Teorema del minimàx generalitzat

El teorema del minimàx 4.1 es pot generalitzar de la següent manera:

Teorema 4.2 Teorema del minimàx generalitzat
Sigui un joc $\eth = (\mathcal{X},\mathcal{Y},M)$ on $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$ i $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$ són conjunts compactes i convexos i

$$M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$$

és una funció continua i còncava de $\boldsymbol{x}$ per tot $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$ i convexa de $\boldsymbol{y}$ per tot $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$. Aleshores el joc està determinat estrictament i existeixen estratègies òptimes dels 2 jugadors.

Notar l'abús de la notació, en el sentit de que ara el joc $\eth$ possiblement és l'extensió mixta d'un joc amb estratègies pures unidimensionals. Comparat amb la notació que s'ha fet servir anteriorment, ara $\boldsymbol{x} = \xi$, $\boldsymbol{y} = \eta$.

Demostració. Per a tot $\boldsymbol{x}_o \in \mathcal{X}$ definim el subconjunt $\mathcal{S}(x_o) \subseteq \mathcal{Y}$ per:

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_o) = \{\boldsymbol{y}_o \in \mathcal{Y} \mid \min_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}} M(\boldsymbol{x}_o,\boldsymbol{y}) = M(\boldsymbol{x}_o,\boldsymbol{y}_o)\} =\\ \arg\min_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}} M(\boldsymbol{x}_o,\boldsymbol{y})$$

i el subconjunt $\mathcal{R}(y_o) \subseteq \mathcal{X}$:

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{y}_o) = \{\boldsymbol{x}_o \in \mathcal{X} \mid \max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_o) = M(\boldsymbol{x}_o,\boldsymbol{y}_o)\}\\ \arg\max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_o).$$

Ara definim la multiaplicació:

$$\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$$

com:

$$\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{y}) \times \mathcal{S}(\boldsymbol{x})$$

Per el teorema de Kakutami (veure l'apèndix C.9, pàg. 34) ψ té almenys un punt fix:

$$\exists(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) \mid \psi(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) = \mathcal{R}(\boldsymbol{y}^*) \times \mathcal{S}(\boldsymbol{x}^*) = (\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$$

que implica:

$$\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{R}(\boldsymbol{y}^*) = \arg\max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*)$$
$$\boldsymbol{y}^* \in \mathcal{S}(\boldsymbol{x}^*) = \arg\min_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}} M(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y})$$

i, per tant, existeix almenys un punt $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ tal que:

$$\min_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}} M(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}) = \Lambda(\boldsymbol{x}^*) = M(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) =\\ \max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*) = \gamma(\boldsymbol{y}^*). \quad \square$$

Capítol 5
Mètodes geomètrics de resolució
5.1 Mètode de l'envolupant convexa

Mètode basat amb la primera demostració del teorema del minimàx (secció 4.3.1, pàg. 6). Només es vàlid per jocs amb matrius $2\times n$ o $m\times 2$. Considerem primer un joc amb una matriu $2 \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots a_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$$

on C_i són les columnes de A. Es tracta de construir els conjunts:

$$\mathcal{S}^* = \text{Conv}\,\{C_1, \cdots C_n\} \tag{5.1}$$
$$\mathcal{T} = \{\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n \mid \max_i\{t_i\} < v\} \tag{5.2}$$

de forma que els conjunts $\mathcal{S}^*$ i $\mathcal{T}$ es toquin en la frontera en un punt $\boldsymbol{s}_o$. Després es construeix l'hiperplà que passa per $\boldsymbol{s}_o$ i separa $\mathcal{S}^*$ i $\mathcal{T}$:

$$a\,t_1 + b\,t_2 = c$$

d'on es té que $v = c/(a+b)$ és la i solució del joc i l'estratègia òptima de J_1 és:

$$\xi_o = \left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right)$$

Per a l'estratègia òptima de J_2, o bé $\boldsymbol{s}_o \in \mathcal{S}^* \cap \mathcal{T}$ coincideix amb una columna C_i de A, i en aquest cas és la estratègia pura i, o bé està en un segment (C_i, C_j), i en aquest cas hem de calcular un λ_o, tal que:

$$\boldsymbol{s}_o = \lambda_0\, C_i + (1-\lambda_0)\, C_j$$
$$\eta_o = (0, \cdots, \overset{i}{\breve{\lambda_0}}, 0, \cdots, \overset{j}{(1-\breve{\lambda_0})}, 0, \cdots)$$

De forma anàloga es pot resoldre un joc amb una matriu $m \times 2$. Només cal construir els conjunts:

$$\mathcal{S}^* = \text{Conv}\,\{F_1, \cdots F_n\}$$
$$\mathcal{T} = \{\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n \mid \min_i\{t_i\} > v\}$$

on F_i són les files de A.

Exemple 5.1 Mètode de l'envolupant convexa
Resoldre el joc de suma zero amb matriu de pagaments[1]:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

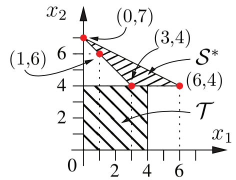


Figura 5.1: Mètode de l'envolupant convexa.

Solució La figura 5.1 mostra els punts corresponents a les columnes de la matriu de pagaments (5.3) i la seva envolupant convexa (conjunt $\mathcal{S}^*$ en l'equació (5.1)), i el conjunt $\mathcal{T}$ (veure l'equació (5.2)). Com que l'intersecció de $\mathcal{S}^*$ i $\mathcal{T}$ no és un únic punt, el joc no té solució única. L'hiperplà separador és:

$$x_2 = 4$$

d'on deduïm que el valor del joc és $v = 4$ i l'estratègia òptima del primer jugador és:

$$\xi_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Per a l'estratègia òptima del segon jugador hem de buscar les combinacions convexes de les columnes C_1 i C_4 que donin lloc al segment intersecció entre $\mathcal{S}^*$ i $\mathcal{T}$:

$$\eta_o(y) = \{\begin{bmatrix} y & 0 & 0 & 1-y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \mid 3\,y + 6\,(1-y) \leq 4,\, 4\,y + 4\,(1-y) \leq 4\} \Rightarrow y \in [2/3, 1] \tag{5.5}$$

Notar que amb l'estratègia donada per (5.4) es complex $\xi_o\, A\, \eta \geq 4$, $\forall \eta$, i amb qualsevol estratègia donada per (5.5) $\xi\, A\, \eta_o \leq 4$, $\forall \xi$ (veure l'equació (4.5), pàg. 6). ■

5.2 Mètode de les rectes

Només es vàlid per jocs amb matrius $2\times n$ o $m\times 2$. Considerem primer un joc amb una matriu $2 \times n$. De (4.3) tenim que $\Lambda(\xi) = \min_j\{\xi\, C_j\}$. Com que qualsevol estratègia mixta de J_1 és de la forma:

$$\xi = (x, 1-x)$$

i les columnes C_j de A són:

$$C_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{bmatrix}$$

[1] Matriu del segon problema de l'examen de l'UNED de febrer 2008, primera setmana.

σ-àlgebra Una família $\mathcal{F}$ de subconjunts de Ω és una σ-àlgebra de subconjunts de Ω si satisfà els axiomes:
- Per a qualsevol conjunt $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$, el conjunt $\mathcal{A}^c \in \mathcal{F}$.
- La unió de qualsevol col·lecció numerable de conjunts de $\mathcal{F}$ està en $\mathcal{F}$.

Sigui $\mathcal{I}$ la família formada per tots els intervals de $\mathbb{R}$. La σ-àlgebra ($\sigma(\mathcal{I})$) engendrada per $\mathcal{I}$ s'anomena σ-àlgebra de Borel en $\mathbb{R}$ i sol denotar-se per $\mathbb{B}$. Anàlogament, $\mathcal{I}_2$ denota la família de tots els rectangles en $\mathbb{R}^2$, i $\mathbb{B}^2$ la σ-àlgebra engendrada.

Siguin $\mathcal{F}_1$,$\mathcal{F}_2$ σ-àlgebra dels conjunts Ω_1,Ω_2 respectivament. La família de subconjunts de $\Omega_1 \times \Omega_2$:

$$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \{\mathcal{A} \times \mathcal{B} \mid \mathcal{A} \in \mathcal{F}_1, \mathcal{B} \in \mathcal{F}_2\} \tag{13.9}$$

engendra una σ-àlgebra anomenada σ-àlgebra producte de $\mathcal{F}_1$,$\mathcal{F}_2$ i sol indicar-se per: $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$. Notar que $\mathbb{B}_2 = \mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$.

B. Conjunts convexes
B.1 Elements

Recta

$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\,\boldsymbol{x}_2);\ \lambda \in \mathbb{R}; \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n\} \tag{13.10}$$

Segment

$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\,\boldsymbol{x}_2);\ 0 \leq \lambda \leq 1; \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n\} \tag{13.11}$$

Conjunt afí Γ és afí si:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Gamma \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\,\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\,\boldsymbol{x}_2 \in \Gamma \tag{13.12}$$

El conjunt de $\mathbb{R}^n$: $\Gamma = \{\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{b} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m\}$, on $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ és un conjunt afí. La funció $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{b}$ es diu funció afí.

Combinació afí Un punt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ és una combinació afí dels punts $\boldsymbol{x}_1, \cdots \boldsymbol{x}_m \in \mathbb{R}^n$ si existeixen les constants $\lambda_1 + \cdots \lambda_m = 1$ tals que:

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\,\boldsymbol{x}_1 + \cdots \lambda_m\,\boldsymbol{x}_m$$

Conjunt convex Γ és convex si:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Gamma \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\,\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\,\boldsymbol{x}_2 \in \Gamma \tag{13.13}$$

Combinació convexa Un punt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ és una combinació convexa dels punts $\boldsymbol{x}_1, \cdots \boldsymbol{x}_m \in \mathbb{R}^n$ si existeixen les constants $\lambda_1, \cdots \lambda_m \geq 0$, $\lambda_1 + \cdots \lambda_m = 1$ tals que:

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\,\boldsymbol{x}_1 + \cdots \lambda_m\,\boldsymbol{x}_m$$

Vèrtex o extrem Un punt $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ és un vèrtex de Γ si no és possible trobar $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Gamma, 0 \leq \lambda \leq 1$ tals que $\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\,\boldsymbol{x}_2$.

Envolupant convexa (*convex hull*) $\text{Conv}\,\Gamma$ d'un conjunt arbitrari Γ és el conjunt de totes les combinacions convexes de punts de Γ:

$$\text{Conv}\,\Gamma = \{\lambda_1\,\boldsymbol{x}_1 + \cdots \lambda_m\,\boldsymbol{x}_m \mid \boldsymbol{x}_i, \in \Gamma;\ \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \cdots \lambda_m = 1\}$$

Semiespai obert

$$\{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < \alpha; \mathbf{c}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; \alpha \in \mathbb{R}\} \tag{13.14}$$

Es diu tancat si és $\leq$.

Subespai (anomenat també subespai lineal) Γ és un subespai si:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Gamma \\ a, b \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow a\,\boldsymbol{x}_1 + b\,\boldsymbol{x}_2 \in \Gamma \tag{13.15}$$

Subespai afí (anomenat també variació lineal, *linear manifold*). Si Γ és un subespai, el subespai afí Λ és el subespai traslladat:

$$\Lambda = \mathbf{b} + \Gamma = \{\boldsymbol{x} + \mathbf{b} \mid \boldsymbol{x} \in \Gamma\} \tag{13.16}$$

Per exemple, en $\mathbb{R}^3$ l'origen, línies i plans que passen per l'origen i tot $\mathbb{R}^3$ són subespais. Mentre que punts, línies i plans en general i tot $\mathbb{R}^3$ són subespais afins.

Con $\mathcal{C}$ és un con si:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x} \in \mathcal{C} \\ \lambda \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\,\boldsymbol{x} \in \mathcal{C} \tag{13.17}$$

Combinació cònica Un punt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ és una combinació cònica dels punts $\boldsymbol{x}_1, \cdots \boldsymbol{x}_m \in \mathbb{R}^n$ si existeixen les constants $\lambda_1, \cdots \lambda_m \geq 0$, tals que:

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\,\boldsymbol{x}_1 + \cdots \lambda_m\,\boldsymbol{x}_m$$

Con normat Per a qualsevol norma en $\mathbb{R}^n$, el con $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ associat a la norma és:

$$\mathcal{C} = \{(\boldsymbol{x}, t) \mid \|x\| \leq t\} \tag{13.18}$$

$\{1, \cdots N\}$ i funció característica v. El valor de Shapley d'un jugador i és calcula com:

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathcal{I} \\ \{i\} \in \mathcal{S}}} \frac{(|\mathcal{S}|-1)!\,(N-|\mathcal{S}|)!}{N!} \times (v(\mathcal{S}) - v(\mathcal{S} \setminus \{i\})) \quad (13.6)$$

on el sumatori s'entén a tots els subconjunts de $\mathcal{I}$ que tenen el jugador i.

El valor de Shapley satisfà els axiomes (veure [4]):

- Equitat: cada jugador obté almenys el que obtindria sense cooperar: $\phi_i(v) \geq v(\{i\})$.
- Eficiència: el pagament total es distribueix entre els jugadors:
$$\sum_{i=1}^{N} \phi_i(v) = v(\mathcal{I})$$
- Simetria: Per qualsevol conjunt $\mathcal{S}$ que no conté els jugadors i i j, si $v(\mathcal{S} \cup \{i\}) = v(\mathcal{S} \cup \{j\})$ aleshores $\phi_i(v) = \phi_j(v)$.

Apèndixs

A. Conceptes de topologia en $\mathbb{R}^n$

Convergència de vectors La seqüència de vectors $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\geq 1} \in \mathbb{R}^n$ convergeix al vector $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ si:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1 \mid \forall i \geq N\ \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{a}\| < \epsilon$$

Una seqüència està acotada (*bounded*) si existeix un número $B \geq 0$ tal que $\|\boldsymbol{x}_i\| \leq B, \forall i$.

Una seqüència és de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1 \mid \forall i \geq N, \forall l \geq 1\ \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i+l}\| < \epsilon$$

Teorema de Bolzano Weierstrass Tota seqüència de vectors acotada en $\mathbb{R}^n$ té una subseqüència de vectors convergent.

Bolla (oberta) de radi $\epsilon > 0$ centrada en $\boldsymbol{a}$, és el conjunt:

$$B_\epsilon(a) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \epsilon\}$$

Entorn Un conjunt $\mathcal{X}$ és un entorn (*neigbourhood*) d'un punt $\boldsymbol{x}$ si existeix un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\boldsymbol{x}) \subset \mathcal{X}$.

Conjunt obert És un conjunt $\mathcal{X}$ que és un entorn de tots els seus punts:

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}\ \exists \epsilon > 0 \mid B_\epsilon(\boldsymbol{x}) \subset \mathcal{X} \quad (13.7)$$

Conjunt tancat És un conjunt $\mathcal{X}$ tal que totes les seqüències de punts de $\mathcal{X}$ convergeixen a un punt contingut en $\mathcal{X}$:

$$\forall \boldsymbol{x} = \lim_{i\to\infty} \boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_i \in \mathcal{X} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \quad (13.8)$$

Notes: Els conjunts del tipus $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ no són ni oberts ni tancats. Els conjunts $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ i $\emptyset$ són alhora oberts i tancats.

Conjunt compacte És un conjunt $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$ tal que per a totes les seqüències de punts de $\mathcal{X}$ hi ha una subseqüència que convergeix a un punt contingut en $\mathcal{X}$. Per a un conjunt compacte $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$ es compleix $\mathcal{X}$ compacte $\Leftrightarrow$ $\mathcal{X}$ és acotat i tancat.

Conjunt dens Un subconjunt $\mathcal{A}$ és dens en un conjunt $\mathcal{X}$ si en l'entorn $\epsilon > 0$ de qualsevol punt $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ hi ha almenys un punt de $\mathcal{A}$. Per exemple, el conjunt dels números racionals, o irracionals, són densos en $\mathbb{R}$.

Espai topològic És un conjunt $\mathcal{X}$ i una col·lecció τ de subconjunts de $\mathcal{X}$ que satisfan els axiomes:

- El conjunt $\emptyset$ i $\mathcal{X}$ estan en τ.
- La unió de qualsevol col·lecció de conjunts de τ està en τ.
- La intersecció de qualsevol col·lecció de conjunts de τ està en τ.

Els conjunts en τ s'anomenen oberts i els seus complements tancats. Un subconjunt de $\mathcal{X}$ pot ser obert, tancat, no obert, no tancat o ambdós.

La topologia estàndard engendrada per la mètrica (o funció distància $\|\cdot\|$) en $\mathbb{R}^n$ està formada per totes les bolles obertes $B_r(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < r\}$.

Espai condicionalment compacte És un espai mètric $\mathcal{X}$ en el que per qualsevol $\epsilon > 0$ hi ha un subconjunt finit dens $\alpha(\epsilon) \in \mathcal{X}$.

Espai separable Un espai mètric és separable si té un subconjunt dens numerable.

resulta que:

$$\Lambda(x) = \min_j\{(a_{1j} - a_{2j})\,x + a_{2j}\} \quad (5.6)$$

La funció donada per (5.6) és una poligonal formada per el mínim de les rectes

$$r_j(x) = (a_{1j} - a_{2j})\,x + a_{2j}.$$

Un cop dibuixada $\Lambda(x)$, una estratègia òptima de J_1 vindrà donada per $v = \max \Lambda(x)$, essent aquest el valor del joc. Si el màxim s'assoleix en més d'un punt, aleshores serà un segment amb extrems $\xi_1 = (x_1,\ 1 - x_1)$ i $\xi_2 = (x_2,\ 1 - x_2)$, de manera que el conjunt d'estratègies òptimes de J_1, $O(J_1,A)$, estarà format per qualsevol combinació convexa de ξ_1,ξ_2. Notar que (x_1,v) i (x_2,v) seran les coordenades del gràfic de $\Lambda(x)$ que donen lloc a les les estratègies òptimes de J_1.

Si $\xi_1 = (x_1,\ 1 - x_1)$ és un punt extrem del conjunt $O(J_1,A)$, aleshores per (x_1,v) i passaran dues rectes

$$v = r_i(x_1) = \xi_1\,C_i,$$
$$v = r_j(x_1) = \xi_1\,C_j.$$

Per a calcular les estratègies òptimes de J_2

$$\eta_o = (0, \cdots, \overset{i}{\lambda_0}, 0, \cdots, \overset{j}{(1-\lambda_0)}, 0, \cdots)$$

hem d'imposar:

$$\lambda_0\,C_i + (1-\lambda_0)\,C_j = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$$

restant les dues equacions anteriors s'obté:

$$\lambda_0\,(a_{1i} - a_{2i}) + (1-\lambda_0)\,(a_{1j} - a_{2j}) = \lambda_0\,p_i + (1-\lambda_0)\,p_j = 0$$

on p_i i p_j són les pendents de les rectes r_i i r_j.

De forma anàloga es pot resoldre un joc amb una matriu $m \times 2$. Només cal dibuixar les rectes donades per les files de A:

$$r_i(y) = (a_{i1} - a_{i2})\,y + a_{i2}.$$

Ara el valor del joc vindrà donat per:

$$v = \min \gamma(y) = \min_y \max_i\{(a_{i1} - a_{i2})\,y + a_{i2}\}$$

és a dir, el mínim de la línia poligonal formada per les rectes $r_i(y)$. Procedint igual que abans obtindríem les solucions òptimes dels jugadors.

Exemple 5.2 Mètode de les rectes

Resoldre el joc de suma zero amb matriu de pagaments (comparar amb l'exemple 5.1):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

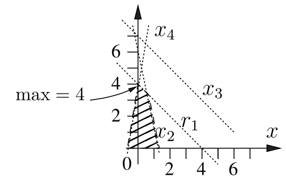


Figura 5.2: Mètode de les rectes.

Solució La figura 5.2 mostra les rectes formades amb les columnes de la matriu de pagaments 5.7:

$$r_1 = -x + 4$$
$$r_2 = -5\,x + 6$$
$$r_3 = -x + 7$$
$$r_4 = 2\,x + 4$$

D'on s'obté que el valor del joc és $v = 4$ i l'estratègia òptima del primer jugador ve donada per la intersecció de les rectes r_1 i r_4 i és:

$$\xi_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Donat que hem agafat les rectes corresponents a les columnes C_1 i C_4, l'estratègia del segon jugador ha de ser del tipus:

$$\eta_o(y) = \begin{bmatrix} y & 0 & 0 & 1-y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

i tenint en compte que ha de ser $F_i\,\eta_o \leq 4$, $\forall i$, on F_i són les files de A (veure (4.6), pàg. 6), es té:

$$\eta_o(y) = \{\begin{bmatrix} y & 0 & 0 & 1-y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \mid 3\,y + 6\,(1-y) \leq 4,\ 4\,y + 4\,(1-y) \leq 4\} \Rightarrow y \in [2/3,1] \quad (5.9)$$

■

5.3 Mètode dels punts fixes

Es basa en la demostració del teorema del minimàx generalitzat (secció 4.4, pàg. 7). Té l'avantatge que es poden introduir restriccions en les estratègies dels jugadors. És a dir, es construeixen els conjunts:

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{y}_o) = \arg\max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_o)$$
$$\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_o) = \arg\min_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}} M(\boldsymbol{x}_o,\boldsymbol{y})$$

i es busquen els punts fixes, és a dir, els punts que compleixen $x_o = \mathcal{R}(\boldsymbol{y}_o)$ i $y_0 = \mathcal{S}(\boldsymbol{x}_o)$.

En la secció 9.3.1, pàg. 17 es tornarà a veure aquest mètode per el cas de jocs finits. En la secció 9.3.2, pàg. 18 s'explica el *mètode dels punts crítics*, que facilita el càlcul dels punts fixes. Cal destacar que el mètode dels punts crítics també seria aplicable en el cas dels jocs finits, tal com s'il·lustra en la segona part de l'exemple 8.1, pàg. 13.

Exemple 5.3 Mètode dels punts fixes[2]
Resoldre el joc de matriu:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

si el primer jugador tria la primera estratègia pura amb probabilitat $\geq 1/4$ i el segon la tercera amb probabilitat $\geq 1/3$.

Solució Definim $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}$ i escrivim el joc equivalent amb funció de pagament:

$$\begin{aligned} M(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) &= \boldsymbol{r} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{s} + \boldsymbol{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} (1 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{s}) \\ &= \boldsymbol{r} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{s} + \boldsymbol{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} \\ &= -r_1 s_1 + 3 r_1 s_2 - 2 r_2 s_1 - 5 r_2 s_2 + 6 r_2 \\ &= (-r_1 - 2 r_2) s_1 + (3 r_1 - 5 r_2) s_2 + 6 r_2 \\ &= (-s_1 + 3 s_2) r_1 + (-2 s_1 - 5 s_2 + 6) r_2 \end{aligned}$$

La següent figura 5.3 mostra els dominis de $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{s}$.

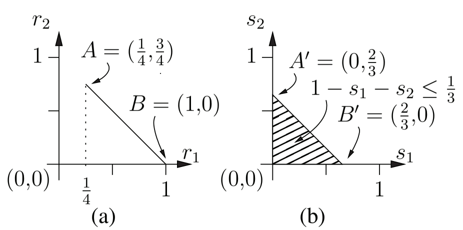


Figura 5.3: Dominis de $\boldsymbol{r}$ (a), i $\boldsymbol{s}$ (b).

Tenim que per el punt $\boldsymbol{r} = A$:

$$M(A,\boldsymbol{s}) = M((\frac{1}{4},\frac{3}{4}),\boldsymbol{s}) = \frac{-7}{4} s_1 + \frac{-7}{2} s_2 + 6 r_2$$

Per tant:

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{r} = A) = \arg\min_{\boldsymbol{s} \in \mathcal{S}} M(A,\boldsymbol{s}) = (0,\frac{2}{3}) = A'$$

Per altra banda:

$$M(\boldsymbol{r},A') = M(\boldsymbol{r},(0,\frac{2}{3})) = 2 r_1 + \frac{8}{3} r_2$$

Per tant:

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{s} = A') = \arg\max_{\boldsymbol{r} \in \mathcal{R}} M(\boldsymbol{r},A') = (\frac{1}{4},\frac{3}{4}) = A$$

Tenim doncs que $\boldsymbol{r} = A$ i $\boldsymbol{s} = A'$ és un punt fix, i per tant solució del joc. D'on es conclou que les estratègies òptimes i el valor del joc és:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ v &= 5/2 \end{aligned}$$

■

Capítol 6
Propietats de les solucions d'un joc matricial

Teorema 6.1 Convexitat de les solucions
Sigui $\eth$ un joc matricial amb matriu $A^{m \times n}$. Aleshores les estratègies òptimes dels jugadors $O(J_1,A)$ i $O(J_2,A)$ són conjunts convexes i compactes de $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$.

Teorema 6.2 Linealitat del valor
Sigui $\eth$ un joc matricial amb matriu A, estratègies òptimes dels jugadors $O(J_1,A)$ i $O(J_2,A)$ i valor $v(A)$. Es compleix que:

$$\begin{aligned} O(J_i,k \times A) &= O(J_i,A), \; i = 1,2 \\ v(k \times A) &= k \times v(A) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} O(J_i,k + A) &= O(J_i,A), \; i = 1,2 \\ v(k + A) &= k + v(A) \end{aligned}$$

on $k + A$ és la matriu resultat de sumar la constant k a tots els elements de A.

6.1 Files i columnes rellevants

Definició 6.1 Es diu que una **fila** F_i és **rellevant** si existeix una estratègia òptima $\xi_o = (x_1, \cdots x_m)$ on $x_i > 0$.
Es diu que una **columna** C_j és **rellevant** si existeix una estratègia òptima $\eta_o = (y_1, \cdots y_n)$ on $y_j > 0$.

[2]Enunciat del segon problema de l'examen de l'UNED de setembre de 2010.

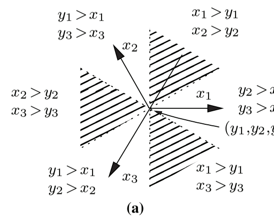


Figura 12.2: Dominància en un joc tripersonal.

Fent servir el mateix sistema de coordenades que en la figura 12.1, podem obtenir una representació geomètrica de les regions imposades per les desigualtats anteriors: Donat el punt $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2,y_3)$, la figura 12.2 mostra les regions que estan dominades per $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} \underset{\mathcal{T}}{\geq} \boldsymbol{x}$ (regions en blanc), i les que dominen a $\boldsymbol{y}$ (regions ombrejades).

Així doncs, per triar un conjunt d'imputacions $\mathcal{F}$ que siguin solució del joc, basta buscar punts del domini de les imputacions (figura 12.1), tals que totes les altres imputacions quedin dintre de regions dominades per algun punt de $\mathcal{F}$ (les regions en blanc de la figura 12.2). Per exemple, si triem la solució:

$$\mathcal{F} = \left\{ (-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1) \right\}$$

i superposem les regions de dominància en cadascun dels punts (veure la figura 12.3), la regió d'imputacions queda dintre de les regions de dominància dels punts (regions en blanc).

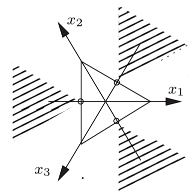


Figura 12.3: Possible solució d'un joc tripersonal.

També es pot comprovar que els conjunts donats per les rectes perpendiculars als eixos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{(c,x_2,x_3) \mid \forall x_2,x_3 \geq -1, \; c + x_2 + x_3 = 0\} \\ \mathcal{F}_2 &= \{(x_1,c,x_3) \mid \forall x_1,x_3 \geq -1, \; x_1 + c + x_3 = 0\} \\ \mathcal{F}_3 &= \{(x_1,x_2,c) \mid \forall x_1,x_2 \geq -1, \; x_1 + x_2 + c = 0\} \end{aligned}$$

on $-1 \leq c \leq 1/2$, també són solució del joc tripersonal. Aquestes s'anomenen **solucions discriminatòries**, doncs equivalen a assignar a un dels jugadors un pagament c, i deixar-ho fora de la negociació.

Capítol 13
Jocs N-personals generals

Ara relaxem la condició de que la suma dels pagaments ha de sumar sempre zero (veure (12.1), pàg. 24). Això no modifica substancialment els resultats del capítol anterior. En concret, definim igualment la funció característica i equivalència de jocs (veure les seccions 12.2 i 12.3). Igualment, definim la **forma reduïda** al joc que compleix (comparar amb (12.3), pàg. 24):

$$v_r(\mathcal{I}) = 0 \tag{13.1}$$
$$v_r(\{1\}) = \cdots v_r(\{N\}) = \gamma \tag{13.2}$$

on γ només pot valer 0 o -1.

Igual que en el cas de suma zero (veure (12.2), pàg. 24), per a calcular la forma reduïda d'un joc buscarem les constants k i a_i fent servir l'equació:

$$v(\mathcal{T}) = k \, v_r(\mathcal{T}) + \sum_{i \in \mathcal{T}} a_i, \; \forall \mathcal{T} \subset \{1, \cdots N\} \tag{13.3}$$

Substituint $v(\mathcal{I})$ en (13.3) tenim que ara haurà de ser:

$$v(\mathcal{I}) = \sum_{i=1}^{N} a_i$$

El concepte de joc essencial i no essencial és també idèntic al cas de suma zero (veure la secció 12.3), només que ara:

$$\begin{aligned} \gamma = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} v(\{i\}) = v(\mathcal{I}), \quad \text{joc no essencial} \\ \gamma = -1 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} v(\{i\}) < v(\mathcal{I}), \quad \text{joc essencial.} \end{aligned}$$

Respecte la solució del joc, també és anàloga al cas dels jocs de suma zero (veure la secció 12.4, pàg. 25), només que ara definim les imputacions com:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = v(\mathcal{I}) \tag{13.4}$$
$$x_i \geq v(\{i\}), \; i = 1, \cdots N. \tag{13.5}$$

13.1 Valor de Shapley

El valor de Shapley dóna una mesura de l'interés que el joc cooperatiu té per a cada jugador. Intuïtivament, dóna el pagament que racionalment es pot donar a cada jugador, tenint en compte la seva contribució a possibles coalicions. Sigui un joc amb N jugadors, $\mathcal{I} =$

Discussió: amb la definició anterior la solució és un **conjunt $\mathcal{F}$ d'imputacions**, i no un únic valor, com en el cas de jocs bipersonals de suma zero. Així doncs, la solució no ens diu quines estratègies han de seguir els jugadors, ni els pagaments que obtindran. Tan sols que seguint algunes estratègies, s'arribarà a alguna de les imputacions contingudes en $\mathcal{F}$. A més, el conjunt $\mathcal{F}$ no és únic: en general hi ha un nombre infinit de conjunts $\mathcal{F}$ que satisfan les condicions anteriors.

A continuació veurem que per a construir un conjunt $\mathcal{F}$ de solucions del joc, basta analitzar la funció característica de la seva forma reduïda. Per això introduïm primer la següent definició:

Definició 12.3 Jocs isomorfes
Dos jocs N-personals amb funcions característiques v_r i v es diuen isomorfes si existeix una bijecció f entre els conjunts d'imputacions del dos jocs tal que per a qualsevol imputacions $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$ del primer joc, aleshores,

$$\boldsymbol{x} \underset{\mathcal{T}}{>} \boldsymbol{y} \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) \underset{\mathcal{T}}{>} f(\boldsymbol{y}), \forall \mathcal{T} \subset \{1,\cdots N\}$$

Es verifiquen els següent teoremes:

Teorema 12.4 Suposem dos jocs N-personals amb funcions característiques v_r i v isomorfes per una bijecció f. Si $\mathcal{F}_r$ és una solució del primer, aleshores el conjunt:

$$\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}_r) \mid \boldsymbol{x}_r \in \mathcal{F}_r\}$$

és una solució del joc de funció característica v.

Teorema 12.5 Suposem dos jocs N-personals S-equivalents amb funcions característiques v_r i v, i constants $k > 0$ i a_i, $i = 1,\cdots N$ amb $\sum_{i=1}^{N} a_i = 0$ (veure la secció 12.3, pàg. 24), aleshores la bijecció que associa la imputació $\boldsymbol{x}_r = (x_1,\cdots x_N)$ amb $\boldsymbol{x} = (k\,x_1 + a_1,\cdots k\,x_N + a_n)$, els fa isomorfes.

Deduïm doncs que si $\mathcal{F}_r$ és una solució del joc amb funció característica v_r, aleshores

$$\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} = (k\,x_1 + a_1,\cdots k\,x_N + a_n) \mid \boldsymbol{x}_r \in \mathcal{F}_r\}$$

és una solució del joc amb funció característica v. Per tant, basta estudiar una solució dels jocs en forma reduïda. Com veurem a continuació, per jocs tripersonals és possible trobar la forma que han de tenir les solucions. Per a jocs amb $N \geq 4$ això no és possible.

12.4.1 Solució d'un joc tripersonal

Suposem un joc tripersonal de suma zero essencial en la forma reduïda. En aquest cas, $v(\{i\}) = -1$ (veure (12.3)). Per tant, les imputacions han de complir (equacions (12.4) i (12.5)):

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 0$$
$$x_i \geq v(\{i\}) = -1$$

Condicions que compleix qualsevol conjunt de punts $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)$ on:

$$x_1 = a\,\cos\alpha$$
$$x_2 = -a\,\cos(60+\alpha)$$
$$x_3 = -a\,\cos(60-\alpha)$$

amb $a \in [0,1]$, $\alpha \in [0,2\pi]$. Aquests punts es poden representar amb les coordenades ortogonals en tres eixos que formen 120^o, com mostra la figura 12.1(a). Traçant les rectes $x_i = -1$, $i = 1,2,3$ sobre aquests eixos de coordenades, s'obté que la regió que verifica $x_i \geq -1$ és el triangle ombrejat que mostra la figura 12.1(b).

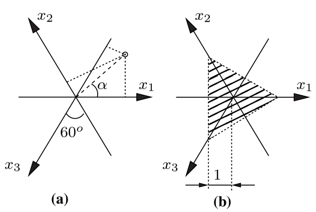


Figura 12.1: Domini de les imputacions en un joc tripersonal.

Estudiem ara la dominància. Considerem la coalició de 2 jugadors $\mathcal{T} = \{1,2\}$. Perquè sigui $\boldsymbol{y} \underset{\mathcal{T}}{>} \boldsymbol{x}$, ha de ser (equacions (12.6) i (12.7)):

$$v(\{1,2\}) \geq y_1 + y_2$$
$$y_1 > x_1$$
$$y_2 > x_2$$

La primera condició està garantida perquè, al ser el joc de suma zero: $v(\{1,2\}) = -v(\{3\})$. Per tant, $-v(\{3\}) \geq y_1 + y_2 = -y_3 \Rightarrow y_3 \geq v(\{3\})$, que ha de ser cert perquè $\boldsymbol{y}$ és una imputació (equació (12.5)). Aplicant la condició de dominància a les altres coalicions de 2 jugadors, i deixant a part la primera condició, tenim que haurà de ser:

$$y_1 > x_1 \qquad y_2 > x_2$$
$$y_3 > x_3 \qquad y_3 > x_3$$

Teorema 6.3 Files o columnes rellevants
Si la fila F_i és rellevant, v és el valor del joc i $\eta_o \in O(J_2,A)$, aleshores:

$$F_i\,\eta_o = v$$

Si la columna C_j és rellevant, v és el valor del joc i $\xi_o \in O(J_1,A)$, aleshores:

$$\xi_o\,C_j = v$$

Teorema 6.4 Nombre de files i columnes rellevants
Un joc matricial amb matriu $A^{m\times n}$ té com a molt $\min\{m,n\}$ columnes i files rellevants. Això és equivalent a dir que les estratègies òptimes dels jugadors és com a molt una mixtura de $\min\{m,n\}$ estratègies pures.

6.2 Dominància

Definició 6.2 Dominància estricta de files (columnes) Es diu que una fila F_i domina estrictament una fila F_j si $F_i > F_j$, en el sentit que $a_{ik} > a_{jk}, \forall k$.

Es diu que una columna C_i domina estrictament una columna C_j si $C_i < C_j$, en el sentit que $a_{ki} < a_{kj}, \forall k$.

Teorema 6.5 Dominància estricta de files (columnes)
Si una fila (o una columna) està dominada estrictament per una altra fila (o columna), o per una combinació convexa d'aquestes, aleshores la fila (o columna) és irrellevant.

Corol·lari 6.1 Si en un joc matricial s'eliminen les files i columnes dominades estrictament, aleshores els conjunts de solucions òptimes dels jugadors i el valor del joc no canvien.

Definició 6.3 Dominància no estricta de files (columnes) Es diu que una fila F_i domina (no estrictament) una fila F_j si $F_i \geq F_j$, en el sentit que $a_{ik} \geq a_{jk}, \forall k$, i que almenys una de les desigualtats és estricta.

Es diu que una columna C_i domina (no estrictament) una columna C_j si $C_i \leq C_j$, en el sentit que $a_{ki} \leq a_{kj}, \forall k$, i que almenys una de les desigualtats és estricta.

Corol·lari 6.2 Si en un joc matricial s'eliminen les files i columnes dominades no estrictament, aleshores el valor del joc no canvia, tot i que es poden perdre algunes de les solucions òptimes dels conjunts de solucions òptimes dels jugadors.

6.3 Admissibilitat

Definició 6.4 Dominància d'estratègies Es diu que una estratègia ξ_1 domina una estratègia ξ_2 si

$$M(\xi_1,y) \leq M(\xi_2,y), \forall y \qquad (6.1)$$

i que la desigualtat és estricta per almenys algun y.

Es diu que una estratègia η_1 domina una estratègia η_2 si

$$M(x,\eta_1) \geq M(x,\eta_2), \forall x \qquad (6.2)$$

i que la desigualtat és estricta per almenys algun x.

Definició 6.5 Admissibilitat Es diu que una estratègia òptima ξ_o de J_1 (η_o de J_2) és admissible si no està dominada per qualsevol altre estratègia de J_1 (de J_2). Altrament de diu que l'estratègia és inadmissible.

Teorema 6.6 Admissibilitat
En qualsevol joc matricial hi ha almenys una estratègia òptima admissible per a cada jugador.

Teorema 6.7 Eliminació de files i columnes dominades
Si en un joc matricial s'eliminen les files i columnes dominades (estrictament o no), aleshores el valor del joc i el conjunt d'estratègies òptimes admissibles no canvia.

Exemple 6.1 Dominància
Resoldre el joc de suma zero amb la següent matriu de pagaments fent servir els criteris de dominància[1] (comparar amb els exemples 5.1, pàg. 8), i 5.2, pàg. 9):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix} \qquad (6.3)$$

Solució La columna 4 està dominada (no estrictament) per la columna 1, per tant, basta considerar el joc:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

on la primera fila està dominada per la segona fila, i basta considerar el joc format per la segona fila, on el segon jugador triarà la primera columna (l'element menor). Es conclou doncs que el joc només té una solució admissible amb valor $v = 4$ i estratègies dels jugadors:

$$\xi_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\eta_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

■

[1] Segon de l'examen de l'UNED de febrer 2008, primera setmana.

6.4 Jocs completament mixtes

Definició 6.6 Estratègia òptima completament mixta és una estratègia en la que totes les components són estrictament positives (> 0).

Teorema 6.8 Jocs completament mixtes
Si la matriu d'un joc de valor $v = 0$ és $A^{m\times n}$, una condició **necessària i suficient** perquè el joc sigui completament mixt és que:
- A és una matriu quadrada ($m = n$),
- el rang de A és $\mathrm{rank}(A) = n - 1$,
- tots els elements de la matriu adjunta[2] de A, A^*, tenen el mateix signe i són no nuls.

A més, les estratègies òptimes dels jugadors són úniques i el valor del joc és:

$$v = \frac{|A|}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\,A^*\,\boldsymbol{e}} \tag{6.4}$$

on $\boldsymbol{e}$ és un vector columna amb tots els elements iguals a 1.

També es compleix que:
- Si la matriu és quadrada i J_1 té una estratègia que no és completament mixta, aleshores J_2 també té una estratègia que no és completament mixta.
- Si la matriu $A^{m\times n}$ no és quadrada, amb $m > n$, aleshores J_1 té una estratègia òptima que no és completament mixta. Si és $m < n$, aleshores J_2 té una estratègia òptima que no és completament mixta

Capítol 7

Determinació de totes les solucions

Definició 7.1 Solucions simples Sigui $\eth = (\mathcal{X},\mathcal{Y},M)$ un joc amb $\xi^* \in \mathcal{X}^*$ i $\eta^* \in \mathcal{Y}^*$ estratègies mixtes de J_1,J_2 tals que:

$$M(\xi^*,y) = M(x,\eta^*) = v, \quad \forall\, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$$

on v és una constant, aleshores (ξ^*,η^*) és una **solució simple** de $\eth$. De la definició es dedueix que (ξ^*,η^*) també és una solució òptima del joc, amb valor igual a v.

Si el joc és matricial, amb matriu A amb files F_i, $i = 1,\cdots m$ i columnes C_j, $j = 1,\cdots n$, aleshores (ξ^*,η^*) és una solució simple si:

$$\xi^*\,C_j = v, \quad j = 1,\cdots n \tag{7.1}$$
$$F_i\,\eta^* = v, \quad i = 1,\cdots m \tag{7.2}$$

Teorema 7.1 Solucions simples
Sigui A una matriu quadrada no singular d'ordre n i A^* la seva matriu adjunta (definida com la matriu de cofactors, veure el peu de pàgina 2, pàg. 12). Una condició necessària i suficient perquè A tingui alguna solució simple és que les quantitats:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} A^*_{ij}, \quad i = 1,\cdots n \tag{7.3}$$
$$c_j = \sum_{i=1}^{n} A^*_{ij}, \quad j = 1,\cdots n \tag{7.4}$$

tinguin el mateix signe. Notar que r_i és la suma dels elements de les files i c_j el de les columnes:

$$\begin{bmatrix} A^*_{11} & \cdots & A^*_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^*_{n1} & \cdots & A^*_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r_1 \\ \cdots \\ r_n \end{bmatrix}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

Demostració. (esbós) Es basa en el fet que de la definició (7.1) i (7.2) es té que:

$$\xi^*\,A = v\,\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}$$
$$A\,\eta^* = v\,\boldsymbol{e}$$

on $\boldsymbol{e}$ és un vector columna amb tots els elements iguals a 1. Notar que, com que A és no singular, té inversa. Per tant, les solucions (ξ^*,η^*) de les equacions anteriors són úniques. A més:

$$\xi^* = v\,\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\,A^{-1} \;\Rightarrow$$
$$\xi^*\,\boldsymbol{e} = 1 = v\,\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\,A^{-1}\,\boldsymbol{e} \;\Rightarrow$$
$$v = \frac{1}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\,A^{-1}\,\boldsymbol{e}} = \frac{|A|}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\,(A^*)^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}} == \frac{|A|}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\,A^*\,\boldsymbol{e}} \;\Rightarrow$$
$$\xi^* = v\,\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\,A^{-1} = \frac{|A|}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\,A^*\,\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\frac{(A^*)^{\mathrm{T}}}{|A|} \;\Rightarrow$$
$$(\xi^*)^{\mathrm{T}} = \frac{A^*\,\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\,A^*\,\boldsymbol{e}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} r_i}\begin{bmatrix} r_1 \\ \cdots \\ r_n \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

Anàlogament s'obté:

$$(\eta^*)^{\mathrm{T}} = \frac{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\,A^*}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\,A^*\,\boldsymbol{e}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} c_j}\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

[2]En anglès *adjugate* o *classical adjoint*. En el llibre de la UNED [1] es defineix la matriu adjunta com la matriu de cofactors, i en aquests apunts seguirem aquesta definició. El cofactor d'un element a_{ij} és $c_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, on M_{ij} és el menor, és a dir, el determinant de la matriu obtinguda al eliminar la fila i i columna j de A. Alguns autors defineixen la matriu adjunta com la trasposta de la matriu de cofactors, degut a que la inversa d'una matriu no singular es pot calcular com com la trasposta de la matriu de cofactors dividida per el determinant.

Teorema 12.2 Si $\mathcal{T} \subset \{1,\cdots N\}$ amb cardinalitat $|\mathcal{T}|$, aleshores

$$|\mathcal{T}|\,\gamma \le v_r(\mathcal{T}) \le (|\mathcal{T}| - N)\,\gamma$$

d'on es té que per una funció característica mòdul 0:

$$v_r(\mathcal{T}) = 0, \;\forall\,\mathcal{T} \subset \{1,\cdots N\}$$

D'aquí es pot deduir que un joc amb funció característica v de mòdul γ serà:

$$\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} v(\{i\}) = 0, \quad \text{joc no essencial}$$
$$\gamma = -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} v(\{i\}) < 0, \quad \text{joc essencial.}$$

Teorema 12.3 Jocs N-personals no essencials
Per a un joc no essencial amb funció característica v es compleix que per a qualsevol conjunts $\mathcal{R}$,$\mathcal{S} \subset \{1,\cdots N\}$ tals que $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \emptyset$, aleshores:

$$v(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = v(\mathcal{R}) + v(\mathcal{S})$$

Per tant, per els jocs no essencials, no té sentit la cooperació, doncs el pagament és el mateix tan si cooperen com si no.

12.4 Solució del joc

La funció característica mesura la conveniència de la cooperació per els jugadors. Ara ens preocuparem de buscar pagaments racionals per a cada jugador. Per això buscarem conjunts de N-tuples $(x_1,\cdots x_N)$ dels pagaments "més favorables" (o **imputacions**) dels jugadors d'un joc N-personal cooperatiu de suma zero amb funció característica v, als que ens referirem com la **solució del joc**.

Una imputació $\boldsymbol{x} = (x_1,\cdots x_N)$ ha de complir:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 0 \tag{12.4}$$
$$x_i \ge v(\{i\}),\; i = 1,\cdots N. \tag{12.5}$$

La condició (12.4) és conseqüència de que el joc és de suma zero. La condició (12.5) és perquè exigim que les imputacions dels jugadors han de ser, al menys, les que assolirien en cas de no cooperar amb cap altre jugador (és a dir, jugar contra una coalició formada per tots els altres jugadors).

Es pot comprovar que les definicions (12.4) i (12.5) impliquen que el conjunt de totes les possibles imputacions és un conjunt convex. A més, si el joc és no essencial, la única imputació possible és $x_i = 0$, $i = 1,\cdots N$.

Per a buscar imputacions racionals que donin lloc a la solució del joc, introduïm el concepte de dominància:

Definició 12.1 Dominància de les imputacions
Direm que la imputació $\boldsymbol{y} = (y_1,\cdots y_N)$ domina la imputació $\boldsymbol{x} = (x_1,\cdots x_N)$ en un conjunt $\mathcal{T} \subset \{1,\cdots N\}$ si es verifiquen les condicions:

$$v(\mathcal{T}) \ge \sum_{i\in\mathcal{T}} y_i \tag{12.6}$$
$$y_i > x_i, \forall\, i \in \mathcal{T} \tag{12.7}$$

i ho denotarem com $\boldsymbol{y} \underset{\mathcal{T}}{>} \boldsymbol{x}$. Direm que la imputació $\boldsymbol{y}$ domina la imputació $\boldsymbol{x}$ si:

$$\exists\mathcal{T} \subset \{1,\cdots N\} \mid \boldsymbol{y} \underset{\mathcal{T}}{>} \boldsymbol{x}$$

Notar que no hi pot haver una imputació que domini una altra en un conjunt d'un sol element ($\boldsymbol{y} \underset{\{i\}}{>} \boldsymbol{x}$), doncs per (12.6) es tindria que $v(\{i\}) \ge y_i$ i per (12.7) $y_i > x_i$, que implica $v(\{i\}) > x_i$, que contradiu (12.5). També es compleix que la dominància és transitiva: $\boldsymbol{z} \underset{\mathcal{T}}{>} \boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{y} \underset{\mathcal{T}}{>} \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{z} \underset{\mathcal{T}}{>} \boldsymbol{x}$.

Donades dues imputacions $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$, es poden donar les següents situacions:
1. $\boldsymbol{y}$ domina a $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{x}$ no domina a $\boldsymbol{y}$.
2. $\boldsymbol{y}$ domina a $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{x}$ també domina a $\boldsymbol{y}$.
3. Cap de les imputacions $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$ domina l'altra.

Definició 12.2 Solució del joc
Direm que un conjunt d'imputacions $\mathcal{F}$ és una solució d'un joc N-personal cooperatiu de suma zero si es verifiquen les dues condicions:
1. Per qualsevol parell d'imputacions $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{F}$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ no es dominen una a l'altra.
2. Qualsevol imputació $\boldsymbol{z} \notin \mathcal{F}$ està dominada per alguna imputació $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$.

Notar que en la definició anterior no s'exigeix que no hi pugui haver imputacions $\boldsymbol{z} \notin \mathcal{F}$ que dominin alguna imputació $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$.

- Direm que el joc és de suma zero si:

$$\sum_{i=1}^{N} M_i(\boldsymbol{x}_1, \cdots \boldsymbol{x}_N) = 0, \forall\, \boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{X}_1, \cdots \boldsymbol{x}_N \in \mathcal{X}_N \tag{12.1}$$

12.1 Jocs no cooperatius

direm que una N-tupla de estratègies mixtes està en equilibri si:

$$M_1(\boldsymbol{y}_1, \cdots \boldsymbol{x}_N) \le M_1(\boldsymbol{x}_1, \cdots \boldsymbol{x}_N), \forall\, \boldsymbol{y}_1 \in \mathcal{X}_1$$
$$\cdots$$
$$M_N(\boldsymbol{x}_1, \cdots \boldsymbol{y}_N) \le M_N(\boldsymbol{x}_1, \cdots \boldsymbol{x}_N), \forall\, \boldsymbol{y}_N \in \mathcal{X}_N$$

De forma semblant a la demostració de la secció 4.3.2, pàg. 6, es pot demostrar que un joc N-personal no cooperatiu té almenys una N-tupla d'equilibri. Però, a diferència del cas bipersonal, no hi ha algorismes senzills per calcular-les.

12.2 Jocs cooperatius

Denotem el conjunt de jugadors per $\mathcal{I} = \{1, \cdots N\}$. Considerarem que el conjunt $\mathcal{T} \subset \mathcal{I}$ de jugadors cooperen de forma que es sincronitzen per triar de forma conjunta cadascuna de les seves estratègies pures que els hi és més favorable. Podem veure aquests jugadors com un únic jugador amb conjunt d'estratègies:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{T}} = \times \mathcal{S}_{i \in \mathcal{T}}$$

amb cardinalitat $|\mathcal{S}_{\mathcal{T}}| = \times n_{i \in \mathcal{T}}$.

Anàlogament, suposarem que els restants $\mathcal{I} \setminus \mathcal{T}$ jugadors també cooperen amb estratègies:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{I} \setminus \mathcal{T}} = \times \mathcal{S}_{\mathcal{I} \setminus \mathcal{T}}$$

amb cardinalitat $|\mathcal{S}_{\mathcal{I} \setminus \mathcal{T}}| = \times n_{\mathcal{I} \setminus \mathcal{T}}$.

Podem entendre aquest esquema com un joc bipersonal de suma zero entre els dos grups de jugadors, amb pagaments amb estratègies pures:

$$M_{\mathcal{T}}(\alpha,\beta) = \sum_{i \in \mathcal{T}} M_i(\alpha,\beta),\ \alpha \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}, \beta \in \mathcal{S}_{\mathcal{I} \setminus \mathcal{T}}$$
$$M_{\mathcal{I} \setminus \mathcal{T}}(\alpha,\beta) = -M_{\mathcal{T}}(\alpha,\beta)$$

i pagaments amb estratègies mixtes $M_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. El valor d'aquest joc serà:

$$v(\mathcal{T}) = \max_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} \min_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}} M_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \min_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}} \max_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} M_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

$v(\mathcal{T})$ s'anomena **funció característica**, i té les següents propietats:

1. $v(\mathcal{I}) = 0$.
2. $v(\mathcal{T}) = -v(\mathcal{I} \setminus \mathcal{T})$
3. Per $\mathcal{R},\mathcal{T} \subset \mathcal{I}$:
$$v(\mathcal{R} \cup \mathcal{T}) \ge v(\mathcal{R}) + v(\mathcal{T}), \forall\, \mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \emptyset$$
4. Si $\mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \emptyset$ i $\mathcal{R} \cup \mathcal{T} = \mathcal{I}$, aleshores:
$$v(\mathcal{R}) + v(\mathcal{T}) \le 0$$

on 4 és conseqüència de 1 i 3.

També es compleix que donat un conjunt de N jugadors, i una funció v amb les propietats 1–4 de la funció característica, aleshores es pot construir un joc N-personal de suma zero que té v com a funció característica.

Notar que la **funció característica** $v(\mathcal{T})$ ens dóna una mesura en la que el grup de jugadors $\mathcal{T}$ es veu afavorit al cooperar, és a dir, al triar les seves estratègies conjuntament.

12.3 Equivalència de jocs cooperatius

Diem que els jocs N-personal cooperatius de suma zero, $\eth$ i $\eth'$, amb estratègies pures $\mathcal{S}_1, \cdots \mathcal{S}_N$ i $\mathcal{S}'_1, \cdots \mathcal{S}'_N$ són S-equivalents si existeixen N aplicacions bijectives

$$f_i : \mathcal{S}_i \to \mathcal{S}'_i$$

i constants $k > 0$ i a_i, $i = 1, \cdots N$ amb $\sum_{i=1}^{N} a_i = 0$ tals que $\forall (\alpha_1, \cdots \alpha_N) \in \mathcal{S}_1 \times \cdots \mathcal{S}_N$,

$$M_i(\alpha_1, \cdots \alpha_M) = k\, M'_i(f_1(\alpha_1), \cdots f_N(\alpha_N)) + a_i, \quad i = 1, \cdots N.$$

Teorema 12.1 Jocs S-equivalents
Si $\eth$ i $\eth'$ són jocs S-equivalents amb funcions característiques v i v_r, aleshores

$$v(\mathcal{T}) = k\, v_r(\mathcal{T}) + \sum_{i \in \mathcal{T}} a_i, \forall\, \mathcal{T} \subset \{1, \cdots N\} \tag{12.2}$$

Per aquest motiu considerarem iguals tots els jocs que condueixen a una mateixa funció característica, i els identificarem per la seva **forma reduïda**, o **funció característica mòdul** γ, que verifica:

$$v_r(\{1\}) = \cdots v_r(\{N\}) = \gamma \tag{12.3}$$

on γ només pot valer 0 o -1.

Notar que:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{j=1}^{n} c_j = \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\ A^* \boldsymbol{e}$$

Com que $\xi^*, \eta^* \ge 0$, es té que:

$$\operatorname{sig} r_i = \operatorname{sig} \sum_{i=1}^{n} r_i = \operatorname{sig} \sum_{j=1}^{n} c_j = \operatorname{sig} c_j \qquad \square$$

El mètode del teorema 7.1 per saber si A té solucions simples és constructiu, doncs si A té solucions simples, les equacions (7.5) i (7.6) ens donen la manera de calcular-les. A més, com s'ha mencionat en la demostració, les solucions (ξ^*, η^*) són úniques.

Teorema 7.2 Teorema de Shapley-Snow
Sigui $\eth$ un joc matricial de matriu $A^{m \times n}$ de valor $v \ne 0$. Aleshores el conjunt d'estratègies òptimes extremes, és a dir, els punts extrems dels conjunts $O(J_1,A)$ i $O(J_2,A)$ és finit. A més, (ξ_1^*, η_1^*) són punts extrems de $O(J_1,A)$ i $O(J_2,A)$ si i només si A té una submatriu no singular B on $(\xi_{1,B}^*, \eta_{1,B}^*)$ és una solució simple de B. Els vectors $(\xi_{1,B}^*, \eta_{1,B}^*)$ són els que s'obtenen de (ξ_1^*, η_1^*) eliminant les components que corresponen a les files i columnes, respectivament, per a obtenir B de A.

Notar que la condició $v \ne 0$ sempre és pot aconseguir sumant una constant a tots els elements de A: v s'incrementa amb el mateix valor, i les estratègies òptimes no canvien (veure el teorema 6.2, pàg. 10).

Mètode de les submatrius per a determinar totes les solucions d'un joc Els teoremes 7.1 i 7.2 proporcionen un mètode pràctic per calcular totes les solucions d'un joc matricial:

1. Assegurar que el valor del joc és diferent de 0. Això es pot aconseguir sumant una constant a tots els elements de A de forma que siguin tots positius.
2. Examinar totes les submatrius 1×1 de A i comprovar si són punts de sella. Si ho són, seran punts extrems.
3. Examinar totes les submatrius 2×2 no singulars de A i comprovar si tenen solucions simples.
4. Comprovar si les solucions (ξ_i^*, η_i^*) simples trobades en el punt 3 (afegint zeros en les components que calgui) són òptimes: Han de complir que $\xi_i^*, C_j \ge F_i\, \eta_i^*$ per $i = 1, \cdots m$, $j = 1, \cdots n$. Si són òptimes, són punts extrems.
5. Es continua el procés fins examinar totes les submatrius d'ordre $\min\{m, n\}$.

Qualsevol combinació convexa de les solucions extremes és una solució òptima del joc.

Capítol 8

Solució amb el mètode símplex

Sigui un joc matricial de matriu $A^{m \times n}$ amb files i columnes F_i i C_j. La solució del joc es pot plantejar com una parella de problemes duals de programació matemàtica:

$$\begin{array}{llrl} \max & \alpha & & \\ \text{s. a} & \xi\, C_j \ge & \alpha & \\ & \xi\, \boldsymbol{e} = & 1 & \\ & \xi \ge & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{llrl} \min & \beta & & \\ \text{s. a} & F_j\, \eta \le & \beta & \\ & \eta^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{e} = & 1 & \\ & \eta \ge & 0 & \end{array}$$

Sigui $\xi = [x_1, \cdots x_m]$, $\eta^{\mathrm{T}} = [y_1, \cdots y_n]$. Definim:

$$X_i = \frac{x_i}{\beta}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix}$$
$$Y_i = \frac{y_i}{\beta}, \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & \cdots & Y_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$w = \frac{1}{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$
$$z = \frac{1}{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\beta} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Aleshores:

$$\begin{array}{llrl} \max & \alpha & & \\ \text{s. a} & \xi\, C_j \ge & \alpha & \\ & \xi\, \boldsymbol{e} = & 1 & \\ & \xi \ge & 0 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{llrl} \min & w = \sum_{i=1}^{n} X_i & & \\ \text{s. a} & \boldsymbol{X}\, A \ge & 1 & \\ & \boldsymbol{X} \ge & 0 & \end{array} \tag{8.1}$$

$$\begin{array}{llrl} \min & \beta & & \\ \text{s. a} & F_j\, \eta \le & \beta & \\ & \eta^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{e} = & 1 & \\ & \eta \ge & 0 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{llrl} \max & z = \sum_{i=1}^{n} Y_i & & \\ \text{s. a} & A\boldsymbol{Y} \le & 1 & \\ & \boldsymbol{Y} \ge & 0 & \end{array} \tag{8.2}$$

Exemple 8.1 Solució amb el mètode símplex
Resoldre el joc de suma zero amb matriu de pagaments:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solució Fent servir (8.2):

	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3	b
	-1	-1	-1	0	0	0	0
	1	0	3	1	0	0	1
	0	4	1	0	1	0	1
	$\boxed{3}$	1	2	0	0	1	1
$1/3$	0	$-2/3$	$-1/3$	0	0	$1/3$	$1/3$
$-1/3$	0	$-1/3$	$7/3$	1	0	$-1/3$	$2/3$
	0	$\boxed{4}$	1	0	1	0	1
	3	1	2	0	0	1	1
$1/6$	0	0	$-1/6$	0	$1/6$	$1/3$	$1/2$
$1/13$	0	0	$\boxed{29/12}$	1	$1/12$	$-1/3$	$3/4$
	0	4	1	0	1	0	1
$-1/4$	3	0	$7/4$	0	$-1/4$	1	$3/4$
$2/29$	0	0	0	$2/29$	$5/29$	$9/29$	$16/29$
	0	0	$29/12$	1	$1/12$	$-1/3$	$3/4$
$-12/29$	0	4	0	$-12/29$	$28/29$	$4/29$	$20/29$
$-21/29$	3	0	0	$-21/29$	$-9/29$	$36/29$	$6/29$

D'on $z = 16/29$, la solució primal i dual:

$$Y_1 = 2/29, \quad Y_2 = 5/29, \quad Y_3 = 9/29$$
$$X_1 = 2/29, \quad X_2 = 5/29, \quad X_3 = 9/29$$

notar que no és estrany que la solució primal i dual coincideixin, doncs la matriu A és simètrica. Així doncs, el valor del joc i les estratègies dels jugadors són:

$$v = 1/z = 29/16$$
$$y_1 = \frac{Y_1}{z} = \frac{2}{16}, \quad y_2 = \frac{Y_2}{z} = \frac{5}{16}, \quad y_3 = \frac{Y_3}{z} = \frac{9}{16}$$
$$x_1 = \frac{X_1}{z} = \frac{2}{16}, \quad x_2 = \frac{X_2}{z} = \frac{5}{16}, \quad x_3 = \frac{X_3}{z} = \frac{9}{16}$$

Observació Aquest problema també es podria resoldre fàcilment amb el mètode del punt fix (veure 5.3, pàg. 9), tal com es mostra a continuació. Definim els vectors:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Tenint en compte que:

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2 = 1 - \boldsymbol{x}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$y_3 = 1 - y_1 - y_2 = 1 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}$$

podem escriure l'equació de pagaments del joc com:

$$\boldsymbol{x}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}(1 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}) + (1 - \boldsymbol{x}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}$$
$$+ 2\,(1 - \boldsymbol{x}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})\,(1 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}) =$$
$$\boldsymbol{x}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{y} + 2 \quad (8.3)$$

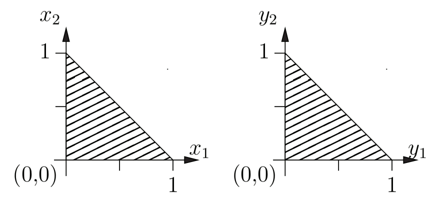


Figura 8.1: Dominis de $\boldsymbol{x}$ (a), i $\boldsymbol{y}$ (b).

La figura 8.1 mostra els dominis dels vectors $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$. Per trobar els punts fixes farem servir el mètode dels punts crítics (veure la secció 9.3.2, pàg. 18). De (8.3) tenim que els punts crítics venen donats per:

$$\left.\begin{aligned} -3\,x_1 - 2\,x_2 + 1 = 0 \\ -2\,x_1 + 4\,x_2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} -3\,y_1 - 2\,y_2 + 1 = 0 \\ -2\,y_1 + 4\,y_2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

d'on es té:

$$x_1 = 2/16, \quad x_2 = 5/16, \quad x_3 = 9/16$$
$$y_1 = 2/16, \quad y_2 = 5/16, \quad y_3 = 9/16$$

Com que els punt crítics estan dintre del domini de $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$, són punts fixes i a més són únics. Per tant són la solució del joc. Substituint en (8.3) tenim que el valor del joc és: $v = 29/16$. ■

Capítol 9

Jocs infinits

Ingredients:

- Dos jugadors amb estratègies pures $x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$ en regions $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$.
- Funció de pagament del primer jugador $M : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$.

fent servir l'esquema de regateig axiomàtic de Nash i de Smorodinsky-kalai.

Solució

Esquema de regateig axiomàtic de Nash Tenim que la frontera de Pareto vindrà donada per la recta:

$$u_1 + u_2 = 220$$
$$u_1 \geq 50$$
$$u_2 \geq 60$$

El punt de desacord és (30,25). Per tant, l'esquema de Nash resoldrà el problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & (u_1 - 30)\,(u_2 - 25) \\ \text{s. a} \quad & u_1,u_2 \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

Com que la frontera de Pareto és una recta de pendent -1, deduïm que la solució del problema anterior és la intersecció de la recta de pendent 1 que passa per el punt de desacord amb la frontera de Pareto (veure la secció 11.2 i la figura 11.4). La primera recta és: $(u_2 - 25) - (u_1 - 30) = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 = 5$. Per tant, la solució de Nash és la intersecció de les rectes:

$$u_1 - u_2 = 5$$
$$u_1 + u_2 = 220$$

És a dir: $u_1 = 225/2 = 117'5$, $u_2 = 215/2 = 107'5$.

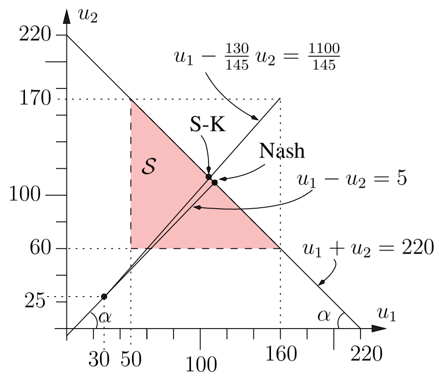


Figura 11.4: Exemple de regateig axiomàtic i Smorodinsky-Kalai.

Esquema de Smorodinsky-kalai (S-K) Primer hem de calcular:

$$b_i = \max\{u_i \mid u_i \in \mathcal{S}\}$$

d'on:

$$b_1 = 220 - 60 = 160$$
$$b_2 = 220 - 50 = 170$$

La solució de S-K serà la intersecció de la recta que passa per el punt de desacord i el punt (b_1,b_2), amb la frontera de Pareto (veure la figura 11.4). La primera recta té equació:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & 1 \\ 30 & 25 & 1 \\ 160 & 170 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que dóna la recta: $u_1 - 130/145\,u_2 = 1100/145$. La intersecció amb $u_1 + u_2 = 220$ dóna: $u_2 = 112$, $u_1 = 108$. Així doncs, en la solució S-K J_2 es veu afavorit. Notar que J_2 té una posició més forta en cas de repartir-se les 220 unitats monetàries, doncs J_2 en rep com a mínim 60, mentre que J_1 en rep com a mínim només 50. ■

Capítol 12

Jocs N-personals de suma zero

Ingredients:

- N jugadors.
- Cada jugador té un conjunt $\mathcal{S}_i = \{\alpha_{i1}, \cdots \alpha_{in_i}\}$, $i = 1, \cdots N$ d'estratègies pures.
- Per les estratègies mixtes del jugador i farem servir la notació

$$\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \cdots x_{in_i}) \in \mathcal{X}_i$$

- Per els pagaments suposarem que hi ha definides N funcions de pagament M_i. Igual que anteriorment, farem servir el mateix nom per identificar la funció de pagament en estratègies pures i mixtes, i les diferenciarem segons els arguments. El pagament del jugador i quan els jugadors $k = 1, \cdots N$ fan servir les estratègies pures α_k serà:

$$M_i(\alpha_{i_1}, \cdots \alpha_{i_N}) : \mathcal{S}_1 \times \cdots \mathcal{S}_N \to \mathbb{R}$$

i el pagament del jugador i quan els jugadors $k = 1, \cdots N$ fan servir les estratègies mixtes $\boldsymbol{x}_k$ serà:

$$M_i(\boldsymbol{x}_1, \cdots \boldsymbol{x}_N) : \mathcal{X}_1 \times \cdots \mathcal{X}_N \to \mathbb{R}$$

on:

$$M_i(\boldsymbol{x}_1, \cdots \boldsymbol{x}_N) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_N=1}^{n_N} x_{1i_1} \cdots x_{Ni_N} M_i(\alpha_{i_1}, \cdots \alpha_{i_N})$$

tenim que la solució de (11.2) ve donada per:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = v + \lambda \frac{\partial f}{\partial u} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial v} = u + \lambda \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

d'on:

$$\frac{v}{u} = \frac{\partial v}{\partial u}$$

que implica que en la solució de Nash l'angle de la tangent amb $\mathcal{S}_c$ és el mateix que l'angle amb la recta que passa per el punt de desacord (u^*,v^*), tal com mostra la figura 11.2.

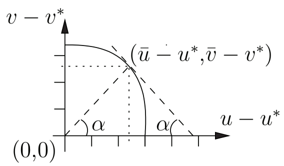


Figura 11.2: Interpretació geomètrica de la solució de Nash.

11.3 Esquema amb amenaces

És possible que l'esquema anterior no sigui realista perquè un jugador té una posició molt més forta que l'altre, i no estigui incentivat en cooperar. Per incloure aquest fet en el model, l'esquema anterior es pot modificar de manera que els jugadors facin servir alguna estratègia (possiblement mixta) per aconseguir un pagament major. El joc modificat és el següent: Els jugador trien unes **estratègies d'amenaça** $(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{y}_a)$. Si els dos jugadors arriben a un acord per cooperar en una estratègia, aquesta s'executa, altrament cadascun rep el pagament que correspon a l'estratègia d'amenaça $(M_1(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{y}_a),M_2(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{y}_a))$, on els pagaments $M_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),M_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ són els que corresponen al joc no cooperatiu. Direm que les estratègies d'amenaça $(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{y}_a)$ estan en equilibri si:

$$M_1(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{y}_a)) - M_2(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{y}_a)) \geq M_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_a)) - M_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_a)),\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^*$$
$$M_2(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{y}_a)) - M_1(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{y}_a)) \geq M_2(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{y}_a)) - M_1(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{y})),\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^*$$

on $\mathcal{X}^*,\mathcal{Y}^*$ són els conjunts d'estratègies mixtes. De les equacions anteriors tenim que les estratègies d'amenaça en equilibri $(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{y}_a)$ són una tupla d'equilibri del joc de suma zero amb matriu de pagament $A - B$, on A i B són les matrius de pagament del primer i segon jugador, respectivament.

Així doncs, un joc bipersonal de suma no zero amb amenaces el resoldrem de la següent manera:

1. Calculem les estratègies d'amenaça en equilibri $(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{y}_a)$ com la tupla d'equilibri d'un joc de suma zero amb matriu de pagament $A - B$.
2. Calculem la solució del joc cooperatiu fent servir l'esquema de Nash per la tripleta $(\mathcal{S}_c,u_a,v_a)$, on $u_a = M_1(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{y}_a)$, $v_a = M_2(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{y}_a)$.

11.4 Solució de Smorodinsky-Kalai

En aquest esquema suposem els axiomes de l'esquema de Nash (axiomes 11.1, pàg. 21), canviant l'axioma 4 *Independència davant alternatives irrellevants* per l'anomenat **axioma de monotonicitat**. La idea intuïtiva d'aquest axioma és que si el conjunt factible "s'expandeix favorablement per un jugador", aleshores el jugador s'ha de veure afavorit. Formalment, definint $b_i(\mathcal{S}) = \max\{x_i \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}\}$, aleshores si $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ i $b_j(\mathcal{S}) = b_j(\mathcal{S}')$ per $j \neq i$, aleshores $F_i(\mathcal{S}) \leq F_i(\mathcal{S}')$, on $F_i(\mathcal{S})$ és el pagament del jugador i amb el conjunt factible $\mathcal{S}$.

La figura 11.3 mostra la interpretació geomètrica de la solució de Smorodinsky-Kalai: Si el punt de desacord és (u^*,v^*), aleshores normalitzem el conjunt factible de forma que l'origen estigui en (u^*,v^*), tracem un recta que passi per l'origen i el punt $(b_1(\mathcal{S}),b_2(\mathcal{S}))$. El punt de tall d'aquesta recta amb la frontera de Pareto és la solució buscada, $(\bar{u},\bar{v})$.

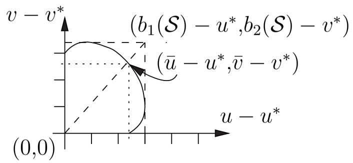


Figura 11.3: Interpretació geomètrica de la solució de Smorodinsky-Kalai.

Notar que la solució de Nash ve donada per el rectangle d'àrea màxima contingut en $\mathcal{S}$, mentre la solució de Smorodinsky-Kalai ve donada per el rectangle d'àrea mínima que conté a $\mathcal{S}$.

Exemple 11.2 Regateig axiomàtic[1]
Dos jugadors J_1 i J_2 han de repartir-se 220 unitats monetàries, rebent un mínim de 50 i 60 unitats, respectivament. En el cas de no arribar a un acord, el primer jugador rep 30 unitats i el segon 25. Trobar la solució

[1]Enunciat del segon problema de l'examen de l'UNED de setembre de 2011.

Definim les mètriques intrínseques en $\mathcal{X},\mathcal{Y}$:

$$\delta(x_1,x_2) = \sup_y |M(x_1,y) - M(x_2,y)|$$
$$\delta(y_1,y_2) = \sup_x |M(x,y_1) - M(x,y_2)|$$

Aquestes mètriques permeten engendrar dues σ-àlgebra en $\mathcal{X},\mathcal{Y}$.

Es farà servir la notació **ICC** per referir-se a un espai mètric generat per les mètriques intrínseques que sigui condicionalment compacte (veure l'apèndix A).

Teorema 9.1 Teoremes sobre les mètriques intrínseques ICC

- Si un dels espais d'estratègies pures $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ és ICC, ho són els dos.
- Si un dels espais d'estratègies pures $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ és ICC, el joc està estrictament determinat.
- Si $\mathcal{X}$ és finit amb m punts, i $\mathcal{Y}$ és ICC, aleshores existeix un subconjunt $\beta \in \mathcal{Y}$ de no més de m punts tal que el valor del joc $v(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = v(\mathcal{X},\beta)$.

Es farà servir la notació **IS** per referir-se a un espai mètric generat per les mètriques intrínseques que sigui separable (veure l'apèndix A). A diferència de ICC, és possible que un espai d'estratègies pures sigui IS i l'altra no.

Teorema 9.2 Teoremes sobre les mètriques intrínseques IS

- Si $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ són IS, aleshores el joc està estrictament determinat i existeixen dos conjunts $\alpha \subset \mathcal{X}, \beta \subset \mathcal{Y}$ tals que el valor del joc $v(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = v(\alpha,\beta)$.

9.1 Jocs sobre el quadrat unitat

Són jocs infinits en els que els espais d'estratègies pures dels jugadors són l'interval $[0,1]$. Suposarem a més que la funció de pagament $M(x,y)$ és una funció continua en $[0,1] \times [0,1]$.

L'extensió mixta del joc està formada per dues distribucions de probabilitat de les estratègies dels dos jugadors, que denotarem respectivament per F i G. És a dir, F i G verifiquen:

$$F(1) = 1$$
$$F(x) \leq F(x'), \quad \forall\ x \leq x'$$
$$F(x) = F(x^+), \quad \text{és a dir, continua per la dreta.}$$

De forma anàloga al cas finit (veure la secció 3.1, pàg. 4):

$$M(x,G) = \int_{y=0}^{1} M(x,y)\, d\,G(y)$$
$$M(F,y) = \int_{x=0}^{1} M(x,y)\, d\,F(x)$$
$$M(F,G) = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} M(x,y)\, d\,F(x)\, d\,G(y)$$

Definim el valor inferior v_i i superior v_{ii} del joc com:

$$v_i = \sup_F \inf_G M(F,G)$$
$$v_{ii} = \inf_G \sup_F M(F,G)$$

Les distribucions F^* i G^* són òptimes si:

$$\sup_F \inf_G M(F,G) = \inf_G M(F^*,G)$$
$$\inf_G \sup_F M(F,G) = \sup_F M(F,G^*)$$

Teorema 9.3 Distribucions òptimes d'un joc infinit
Es compleix que:

$$\inf_G M(F,G) = \inf_y M(F,y)$$
$$\sup_F M(F,G) = \sup_x M(x,G)$$

Demostració. Provarem la primera relació (la segona és anàloga). Primer notem que:

$$\inf_G M(F,G) \leq \inf_y M(F,y)$$

doncs el terme de la dreta és un cas particular del de l'esquerra de la desigualtat. Per altra banda:

$$\inf_G M(F,G) =$$
$$\inf_G \int_0^1\int_0^1 M(x,y)\, d\,F(x)\, d\,G(y) =$$
$$\inf_G \int_0^1 M(F,y)\, d\,G(y) \geq$$
$$\inf_G \int_0^1 \inf_y M(F,y)\, d\,G(y) =$$
$$\inf_G \inf_y M(F,y) \int_0^1 d\,G(y) =$$
$$\inf_y M(F,y)$$

d'on es conclou amb la igualtat que es volia demostrar. □

El teorema anterior permet reescriure el valor inferior v_i i superior v_{ii} del joc com:

$$v_i = \sup_F \inf_G M(F,G) = \sup_F \inf_y M(F,y)$$
$$v_{ii} = \inf_G \sup_F M(F,G) = \inf_G \sup_x M(x,G)$$

i les distribucions F^* i G^* són òptimes si:

$$\sup_F \inf_y M(F,y) = \inf_y M(F^*,y)$$
$$\inf_G \sup_x M(x,G) = \sup_x M(x,G^*)$$

També es compleix que si $M(x,y)$ és continua, es poden substituir els $\sup$ i $\inf$ per $\max$ i $\min$ respectivament.

Teorema 9.4 Solució d'un joc sobre el quadrat unitat
Un joc infinit sobre el quadrat unitat té valor (veure[2, pàgina 53]). Una condició necessària i suficient perquè les distribucions F_o i G_o siguin òptimes és que (F_o,G_o) sigui un punt de sella sobre el quadrat unitat:

$$M(x,G_o) \le M(F_o,G_o) \le M(F_o,y)$$

També es compleix que si trobem un $v \in R$ i distribucions F_o i G_o tals que:

$$M(x,G_o) \le v \le M(F_o,y)$$

aleshores v és el valor del joc, i F_o i G_o són estratègies òptimes.

Finalment, sigui el valor del joc v, i F_o i G_o les estratègies òptimes. Definim les funcions:

$$H(x) = M(x,G_o)$$
$$K(y) = M(F_o,y)$$

aleshores per qualsevol $x^* \in [0,1]$ en que la derivada per l'esquerra de $F_o(x^*)$ sigui positiva o no existeixi, es té que:

$$H(x^*) = \max_x H(x) = v$$

i per qualsevol $y^* \in [0,1]$ en que la derivada per l'esquerra de $G_o(y^*)$ sigui positiva o no existeixi, es té que:

$$K(y^*) = \min_y K(y) = v$$

9.2 Jocs convexes

Teorema 9.5 Solució d'un joc convex
Sigui un joc sobre el quadrat unitat on per cada x, $M(x,y)$ és una funció estrictament convexa de y. Aleshores existeix una estratègia òptima única per el segon jugador de la forma:

$$G_o(y) = I_b(y) = \begin{cases} 1, & y \ge b \\ 0, & y < b \end{cases} \tag{9.1}$$

El valor del joc es pot calcular com:

$$v = \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} M(x,y)$$

i b és la solució única de:

$$v = \max_{x\in[0,1]} M(x,b)$$

Si el joc és convex en les dues variables, aleshores el valor del joc és:

$$v = \min_{y\in[0,1]} \max\{M(0,y), M(1,y)\} \tag{9.2}$$

essent b en (9.1) el valor de y que soluciona (9.2). Notar que la solució de (9.2) sovint ve donada per la intersecció de les corbes $M(0,y)$ i $M(1,y)$ (veure la figura 9.1).

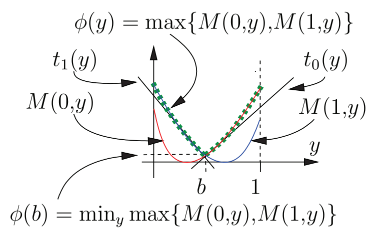


Figura 9.1: Solució d'un joc convex en les dues variables.

El jugador 1 té una estratègia òptima donada per:

$$F_o(x) = \alpha\, I_0(x) + (1-\alpha)\, I_1(x) \tag{9.3}$$

on $\alpha \in [0,1]$. Per a demostrar-ho, siguin $t_0(y)$ i $t_1(y)$ les rectes tangents a les corbes $M(0,y)$ i $M(1,y)$, respectivament, en el punt $y = b$ (veure la figura 9.1):

$$\begin{aligned} t_0(y) &= r_0\, y + b_0 \\ t_1(y) &= r_1\, y + b_1 \end{aligned} \tag{9.4}$$

Tenim que:

$$\begin{aligned} M(F_o,y) = \int_0^1 M(x,y)\, d\,F_o(x) = \\ \alpha\, M(0,y) + (1-\alpha)\ M(1,y) \ge \\ \alpha\, t_0(y) + (1-\alpha)\ t_1(y) = \\ (\alpha\, r_0 + (1-\alpha)\, r_1)\, y + \alpha\, b_0 + (1-\alpha)\, b_1 \end{aligned} \tag{9.5}$$

els valors màxims de $(u,v) \in \mathcal{S}_c$. Donat que

$$\begin{aligned} u &= \boldsymbol{x}\, A\, \boldsymbol{y} = 5\,x\,y - 3\,x - 3\,y + 3 \\ v &= \boldsymbol{x}\, B\, \boldsymbol{y} = 5\,x\,y - 2\,x - 2\,y + 2 \\ \boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} x & (1-x) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} y & (1-y) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

els punts buscats resolen el problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & u = 5\,x\,y - 3\,x - 3\,y + 3 \\ \text{s. a} \quad & u - v = 1 - x - y = k \\ & x,y \ \in [0,1] \end{aligned}$$

per alguna constant k. Definint el Lagrangià:

$$L = u + \lambda\,(1 - x - y - k)$$

tenim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 5\,y - 3 - \lambda = 0 \to \lambda = 5\,y - 3 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 5\,x - 3 - \lambda = 0 \to \lambda = 5\,x - 3 \end{aligned}$$

d'on s'obté $x = y$. Per tant, els punts buscats venen donats per les corbes paramètriques (veure la figura 11.1(b)):

$$\begin{aligned} u &= 5\,x^2 - 6\,x + 3,\ x \in [0,1] \\ v &= 5\,x^2 - 4\,x + 2,\ x \in [0,1] \end{aligned}$$

■

Suposem que u^* i v^* són els valors maxmin dels dos jugadors:

$$\begin{aligned} u^* &= \max_{\boldsymbol{x}} \min_{\boldsymbol{y}} M_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ v^* &= \max_{\boldsymbol{y}} \min_{\boldsymbol{x}} M_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

A continuació definirem un conjunts d'axiomes plausibles per a determinar la tupla d'equilibri $(\bar{u},\bar{v})$, anomenada **solució de Nash d'un joc bipersonal cooperatiu**, caracteritzat per la tripleta (S_c,u^*,v^*).

Axiomes 11.1 Esquema de Nash
1. **Racionalitat** si els jugadors cooperen han d'aconseguir pagaments majors que en la versió no cooperativa:
$$\begin{aligned} \bar{u} &\ge u^* \\ \bar{v} &\ge v^* \end{aligned}$$
2. **Factibilitat**
$$(\bar{u},\bar{v}) \in \mathcal{S}_c$$
3. **Optimalitat de Pareto**: $(\bar{u},\bar{v})$ és Pareto-òptim. Un punt $(u_o,v_o) \in \mathcal{S}$ és Pareto-òptim si no hi ha un altre punt $(u,v) \in \mathcal{S}$ que compleixi $u \ge u_o$ i $v \ge v_o$ i que almenys una de les desigualtats sigui estricta. És a dir, no hi pot haver un altre punt en $\mathcal{S}$ que millori el pagament d'un jugador sense empitjorar el de l'altre. El conjunt de punts de $\mathcal{S}$ que són Pareto-òptims s'anomenen frontera de Pareto del conjunt $\mathcal{S}$. Per exemple, en la figura 11.1.(a) la frontera de Pareto del conjunt $\mathcal{S}_c$ és el segment $[(2,3),(3,2)]$, mentre que en la figura 11.1.(b) la frontera de Pareto del conjunt $\mathcal{S}_n$ són els punts $(2,3)$ i $(3,2)$.
4. **Independència davant alternatives irrellevants**: Si $(\bar{u},\bar{v}) \in \mathcal{T}_c \subset \mathcal{S}_c$ és la solució del joc amb conjunt factible $\mathcal{S}_c$, aleshores també ho és del joc amb conjunt factible $\mathcal{T}_c$.
5. **Independència davant transformacions lineals** Si el conjunt factible $\mathcal{T}_c$ s'obté de la transformació lineal
$$\mathcal{T}_c = \{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{u} = \alpha_1\, u + \beta_1,\, \boldsymbol{v} = \alpha_2\, v + \beta_2, \\ (u,v) \in \mathcal{S}_c\}$$
i $(\bar{u},\bar{v})$ és solució de $\mathcal{S}_c$, aleshores $(\alpha_1\, \bar{u} + \beta_1, \alpha_2\, \bar{v} + \beta_2)$ és solució de $\mathcal{T}_c$.
6. **Simetria** Si $(u,v) \in \mathcal{S}_c \Rightarrow (v,u) \in \mathcal{S}_c$ i $u^* = v^*$, aleshores $\bar{u} = \bar{v}$.

Teorema 11.1 Teorema de Nash per jocs cooperatius un joc bipersonal cooperatiu caracteritzat per la tripleta (S_c,u^*,v^*) té un únic punt $(\bar{u},\bar{v})$ que satisfà els 6 axiomes anteriors. El punt $(\bar{u},\bar{v})$ és la solució de

$$\begin{aligned} \max \quad & g(u,v) = (u - u^*)\,(v - v^*) \\ \text{s. a} \quad & (u,v) \in \mathcal{S}_c \\ & u \ge u^* \\ & v \ge v^* \end{aligned} \tag{11.1}$$

11.2 Interpretació geomètrica

Si agafem com origen de coordenades el punt (u^*,v^*), la solució del Nash (11.1) és equivalent a:

$$\begin{aligned} \max \quad & g(u,v) = u\,v \\ \text{s. a} \quad & f(u,v) = 0 \\ & u \ge 0 \\ & v \ge 0 \end{aligned} \tag{11.2}$$

on $f(u,v) = 0$ és la funció que determina la frontera de $\mathcal{S}_c$. Definint el Lagrangià:

$$L = u\,v + \lambda\, f(u,v)$$

Tupla d'equilibri són estratègies mixtes $(\boldsymbol{x}_o,\boldsymbol{y}_o)$ que verifiquen:

$$M_1(\boldsymbol{x}_o,\boldsymbol{y}_o) \geq M_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_o),\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^*$$
$$M_2(\boldsymbol{x}_o,\boldsymbol{y}_o) \geq M_2(\boldsymbol{x}_o,\boldsymbol{y}),\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^*$$

En termes de les matrius de pagaments:

$$\boldsymbol{x}_o\, A\, \boldsymbol{y}_o \geq \boldsymbol{x}\, A\, \boldsymbol{y}_o,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^*$$
$$\boldsymbol{x}_o\, B\, \boldsymbol{y}_o \geq \boldsymbol{x}_o\, B\, \boldsymbol{y},\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^*$$

Teorema 10.1 Teorema de Nash per jocs de suma no zero
Un Joc bipersonal de suma no zero té garantida l'existència de tuples d'equilibri en estratègies mixtes. La demostració es basa en el teorema del punt fix de Brouwer i és anàloga al cas de jocs de suma zero (veure la secció 4.3.2, pàg. 6).

Per a calcular les tuples d'equilibri es pot fer servir l'algorisme de de Lemke i Howson (veure [2, pàgina 170]).

Capítol 11
Problemes de regateig axiomàtic

En aquest capítol abordarem el següent tipus de joc: Els jugadors trien una estratègia que els proporciona uns pagaments o **punt de desacord** (*disagreement point*). Si els jugadors es posen d'acord, aleshores cooperen per aconseguir els pagaments desitjats, subjecte a una funció de pagament. Altrament, aconsegueixen el punt de desacord. Hi pot haver diferents aproximacions per a determinar quin és el punt de desacord i la solució justa del problema. El que farem és definir una axiomàtica que determina la solució. Aquest tipus de problemes els va iniciar Nash en 1950 al estudiar jocs cooperatius, i s'anomenen regateig axiomàtic (*axiomatic bargaining*). A continuació s'introdueix el problema seguint el plantejament inicial de Nash i algunes extensions.

11.1 Esquema d'arbitratge de Nash

En aquesta secció considerem un **joc bipersonal de suma no zero cooperatius**. Suposarem els mateixos ingredients que en el cas dels jocs bipersonals de suma no zero no cooperatius descrits en el capítol anterior, amb la diferència que ara els jugadors cooperen per aconseguir el màxim benefici. Cal, doncs, redefinir el concepte de tupla d'equilibri.

Definim el **conjunt factible** $\mathcal{S}_c \in \mathbb{R}^2$ on les coordenades (u,v) són respectivament els pagaments del primer i segon jugadors. Notar que el conjunt $\mathcal{S}_n$ definit per un joc amb els mateixos pagaments, però no cooperatiu serà $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_c$. Això és perquè, en cas de triar estratègies mixtes en l'esquema cooperatiu, els jugadors es poden posar d'acord per sincronitzar les seves eleccions perquè el pagament obtingut sigui el més convenient.

Exemple 11.1 Conjunt factible
Suposem un joc amb matriu de pagaments:

$$P = \begin{bmatrix} (2,3) & (0,0) \\ (0,0) & (3,2) \end{bmatrix}$$

Per un joc no cooperatiu:

$$M_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{y},\ M_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

i deduïm que hi ha dues tuples d'equilibri en estratègies pures: $\boldsymbol{x}_1 = (1,0)$, $\boldsymbol{y}_1 = (1,0)$ i $\boldsymbol{x}_2 = (0,1)$, $\boldsymbol{y}_2 = (0,1)$, amb pagaments $M_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1) = 2$, $M_2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1) = 3$ i $M_1(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2) = 3$, $M_2(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2) = 2$. Amb les estratègies mixtes $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{y}_3 = (1/2,1/2)$ s'obté $M_1(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{y}_3) = M_2(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{y}_3) = 5/4$.

En canvi, si els jugadors cooperen i es posen d'acord en triar de forma simultània les mateixes estratègies, aleshores $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, i els pagaments seran:

$$M_1^c(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\,\mathrm{diag}(A),\ M_2^c(\boldsymbol{x}) = \mathrm{diag}(B)\,\boldsymbol{y}$$

i amb estratègies mixtes $\boldsymbol{x}_o = \boldsymbol{y}_o = (1/2,1/2)$, els jugadors aconseguirien els pagaments: $M_1^c = M_2^c = 5/2$. Clarament, en cas de cooperar, i per a tots els possibles acords entre els jugadors, el conjunt factible $\mathcal{S}_c$ serà l'envolupant convexa de tots els punts (m_1,m_2) de la matriu P (veure la figura 11.1(a)).

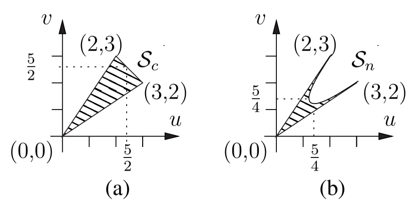


Figura 11.1: Regions $\mathcal{S}_c$ i $\mathcal{S}_n$ en un joc cooperatiu (a) i no cooperatiu (b), respectivament.

Per a calcular el conjunt $\mathcal{S}_n$ del joc no cooperatiu, notar que per $\boldsymbol{x} = (1,0)$, al variar $\boldsymbol{y}$ s'obtindrà el segment $(u,v) \in [(2,3),(0,0)]$. Per $\boldsymbol{x} = (0,1)$, al variar $\boldsymbol{y}$ s'obtindrà el segment $(u,v) \in [(0,0),(3,2)]$. Finalment, per qualsevol valor de $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ podem obtenir la frontera resolent el problema de programació matemàtica que busca

triant:

$$\alpha\, r_0 + (1-\alpha)\, r_1 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{-r_1}{r_0} \tag{9.6}$$

de (9.4) tenim que $\alpha\, b_0 + (1-\alpha)\, b_1 = \phi(b)$ (doncs $t_0(y) = t_0(y) = \phi(b)$). Per tant, la desigualtat (9.5) és $M(F_o,y) \geq \phi(b)$. Això demostra (9.3), amb un valor de α donat per l'equació (9.6).

Teorema 9.6 Solució d'un joc còncau
Anàlogament, si per cada y $M(x,y)$ és una funció estrictament còncava de x, aleshores existeix una estratègia òptima única per el primer jugador de la forma:

$$F_o(x) = I_a(x)$$

on $I_a(x)$ és la funció esglaó:

$$I_a(x) = \begin{cases} 1, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases} \tag{9.7}$$

El valor del joc es pot calcular com:

$$v = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} M(x,y)$$

i a és la solució única de:

$$v = \min_{y\in[0,1]} M(a,y)$$

Si el joc és còncau en les dues variables, aleshores, a més, el valor del joc és:

$$v = \max_{x\in[0,1]} \min\{M(x,0), M(x,1)\}$$

i el jugador 2 té una estratègia òptima donada per:

$$G_o(y) = \alpha\, I_0(y) + (1-\alpha)\, I_1(y)$$

on $\alpha \in [0,1]$.

9.3 Jocs separables

Definim un joc separable com un joc sobre el quadrat unitat amb funció de pagament:

$$M(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, r_i(x)\, s_j(y) = \boldsymbol{r}(x)\, A\, \boldsymbol{s}(y)$$
$$\boldsymbol{r}(x) = (r_1(x), \cdots r_m(x))$$
$$\boldsymbol{s}(x) = (s_1(x), \cdots s_n(x))$$

on $r_i(x)$, $s_j(y)$ són funcions contínues en $[0,1]$.

La seva extensió mixta tindrà funció de pagament:

$$M(F,G) = \int_0^1\int_0^1 \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, r_i(x)\, s_j(y)\, d\,F(x)\, d\,G(y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, r_i\, s_j = \boldsymbol{r}\, A\, \boldsymbol{s}$$

on:

$$\boldsymbol{r} = (r_1, \cdots r_m)$$
$$\boldsymbol{s} = (s_1, \cdots s_n)$$
$$r_i = \int_0^1 r_i(x)\, d\,F(x),\ i = 1, \cdots m \tag{9.8}$$
$$s_j = \int_0^1 s_j(y)\, d\,G(y),\ j = 1, \cdots n \tag{9.9}$$

Per tant, també es farà servir la notació:

$$M(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, r_i\, s_j = \boldsymbol{r}\, A\, \boldsymbol{s}$$

Els dominis de $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{s}$ són:

$$\mathcal{R} = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^m \mid \exists F(x) \wedge r_i = \int_0^1 r_i(x)\, d\,F(x),\ i = 1, \cdots m\}$$

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n \mid \exists G(y) \wedge s_j = \int_0^1 r_j(y)\, d\,G(y),\ j = 1, \cdots n\}$$

Aquests conjunts són les envolupants convexes de les corbes paramètriques:

$$\mathcal{R}^* = \{\boldsymbol{r}(x) = (r_1(x), \cdots r_m(x)) \mid x \in [0,1]\}$$
$$\mathcal{S}^* = \{\boldsymbol{s}(y) = (s_1(y), \cdots s_m(y)) \mid y \in [0,1]\}$$

Per tant, les estratègies $\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{s}_o$ són òptimes si:

$$\max_{\boldsymbol{r}\in\mathcal{R}} M(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}_o) = \min_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{S}} M(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{s})$$

essent el valor del joc $M(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{s}_o)$.

9.3.1 Mètode del punts fixes

Definim les transformacions:

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{r}_o) = \{\boldsymbol{s}_o \in \mathcal{S} \mid \min_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{S}} M(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{s}) = M(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{s}_o)\}$$
$$\mathcal{R}(\boldsymbol{s}_o) = \{\boldsymbol{r}_o \in \mathcal{R} \mid \max_{\boldsymbol{r}\in\mathcal{R}} M(\boldsymbol{s}_o,\boldsymbol{r}) = M(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{s}_o)\}$$

i l'aplicació:

$$\phi : \mathcal{R}\times\mathcal{S} \to \mathcal{R}\times\mathcal{S}$$
$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) \to \phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) = (\mathcal{R}(\boldsymbol{s}),\mathcal{S}(\boldsymbol{r}))$$

El teorema de Kakutami garanteix l'existència d'algun punt fix $(\boldsymbol{r}_o,\boldsymbol{s}_o)$ que serà, per tant, solució del joc. A més, el conjunt de punts fixes de $\mathcal{R}$ és tancat i convex (i igualment per els punts fixes de $\mathcal{S}$).

Un cop determinats els punts fixes, hem de determinar les distribucions de les estratègies òptimes, $F(x)$ i $G(y)$ que satisfan (9.8) i (9.9), respectivament. Per exemple, per trobar $F(x)$ haurem de trobar una combinació convexa de k punts de $\boldsymbol{r}(x)$ tals que:

$$\boldsymbol{r}_o = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{r}(x_i)$$

de forma que la distribució buscada serà:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{x_i}(x)$$

on $I_a(x)$ és la funció esglaó (veure (9.7), pàg. 17). Notar que en general la solució no és única.

9.3.2 Mètode dels punts crítics

El mètode anterior es pot simplificar de la següent manera. Definim la forma canònica d'un joc separable com:

$$M(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, r_i(x)\, s_j(y) + \sum_{i=1}^{n} b_i\, r_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_j\, s_j(y) + d$$

on la matriu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ no és singular. Sempre és possible trobar una descomposició canònica per un joc separable. En termes dels conjunts $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}M(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) =& \\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, r_i\, s_j + \sum_{i=1}^{n} b_i\, r_i + \sum_{i=1}^{n} c_j\, s_j + d = \\ &\sum_{j=1}^{n} s_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, r_i + c_j\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i\, r_i + d = \\ &\sum_{i=1}^{n} r_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, s_j + b_i\right) + \sum_{j=1}^{n} c_j\, s_j + d\end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{aligned}M(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) &= \boldsymbol{r}\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}\,\mathbf{b} + \mathbf{c}\,\boldsymbol{s} + d \\ &= (\boldsymbol{r}\,\mathbf{A} + \mathbf{c})\,\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}\,\mathbf{b} + d \qquad (9.10)\\ &= \boldsymbol{r}\,(\mathbf{A}\,\boldsymbol{s} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}\,\boldsymbol{s} + d \qquad (9.11)\end{aligned}$$

on:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n\end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n\end{bmatrix}$$

Com que $\mathbf{A}$ és no singular, els següents sistemes tenen solució:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}\,\mathbf{A} + \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \\ &\qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, r_i + c_j = 0,\ j = 1,\cdots n \qquad (9.12)\\ &\mathbf{A}\,\boldsymbol{s} + \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, s_j + b_i = 0,\ i = 1,\cdots n \qquad (9.13)\end{aligned}$$

Anomenarem primer i segon punts crítics als punts $\boldsymbol{r}_0$ i $\boldsymbol{s}_0$ que resolen (9.12) i (9.13), respectivament.

Teorema 9.7 Punts crítics d'un joc separable

- Si el primer i segon punts crítics d'un joc separable en la forma canònica són $\boldsymbol{r}_0 \in \mathcal{R}$ i $\boldsymbol{s}_0 \in \mathcal{S}$, aleshores són punts fixes i el valor del joc és:

$$\begin{aligned}v = \boldsymbol{r}_0\,\mathbf{b} + d &= \sum_{i=1}^{n} b_i\, r_i + d \\ = \mathbf{c}\,\boldsymbol{s}_0 + d &= \sum_{j=1}^{n} c_j\, s_j + d\end{aligned}$$

- Si $\boldsymbol{r}_0 \in \operatorname{int}\mathcal{R}$ i $\boldsymbol{s}_0 \in \operatorname{int}\mathcal{S}$[1], aleshores són els únics punts fixes.

- Si $\boldsymbol{r}_0 \notin \mathcal{R}$, aleshores els punts fixes de $\mathcal{S}$ estan en $\operatorname{fr}\mathcal{S}$. Anàlogament, si $\boldsymbol{s}_0 \notin \mathcal{S}$, aleshores els punts fixes de $\mathcal{R}$ estan en $\operatorname{fr}\mathcal{R}$.

Exemple 9.1 Jocs separables[2]
Resoldre el joc:

$$\begin{aligned}M(x,y) =& 2\cos(3x)\cos(4y) + 2\cos(3x)\sin(4y) + \\ & 12\sin(3x)\cos(4y) + 6\sin(3x)\sin(4y) - \\ & 2\cos(3x) - 10\sin(3x) - \\ & 8\cos(4y) - 4\sin(4y) + 3\end{aligned}$$

[1] Es fa servir la notació $\operatorname{int}\mathcal{S}$ i $\operatorname{fr}\mathcal{S}$ per l'interior i la frontera del conjunt $\mathcal{S}$.
[2] Enunciat del primer problema de l'examen de l'UNED de setembre de 2011.

Solució Definim:

$$\begin{aligned}r_1 &= \cos(3x) \qquad & s_1 &= \cos(4y)\\ r_2 &= \sin(3x) & s_2 &= \sin(4y)\end{aligned}$$

d'on tenim:

$$\begin{aligned}M(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) =& 2\,r_1\,s_1 + 2\,r_1\,s_2 + 12\,r_2\,s_1 + 6\,r_2\,s_2 - \\ & 2\,r_1 - 10\,r_2 - 8\,s_1 - 4\,s_2 + 3 = \\ & \boldsymbol{r}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 12 & 6\end{bmatrix}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}\begin{bmatrix} -2 \\ -10\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{s} + 3\end{aligned}$$

on $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2\end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2\end{bmatrix}$. Aplicant el mètode dels punts crítics:

$$\boldsymbol{r}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 12 & 6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -4\end{bmatrix} = 0 \qquad (9.14)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 12 & 6\end{bmatrix}\boldsymbol{s} + \begin{bmatrix} -2 \\ -10\end{bmatrix} = 0 \qquad (9.15)$$

d'on:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_0 &= \frac{1}{-12}\begin{bmatrix} 8 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -12 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2/3\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{s}_0 &= \frac{1}{-12}\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -12 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Donat que $\boldsymbol{r}_0 \in \mathcal{R}$ i $\boldsymbol{s}_0 \in \mathcal{S}$, són punts fixes i són únics (veure la figura 9.2). Podem, doncs, calcular el valor del joc. Tenint en compte 9.14 i 9.15, el valor del joc serà:

$$M(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{s}_0) = \boldsymbol{r}_0\begin{bmatrix} -2 \\ -10\end{bmatrix} + 3 = \begin{bmatrix} -8 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{s}_0 + 3 = -11/3$$

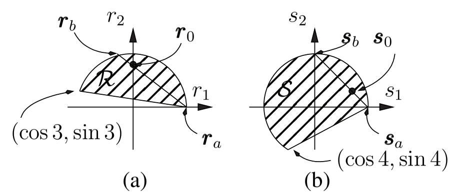


Figura 9.2: Solució d'un joc separable.

Per a l'estratègia òptima del primer jugador busquem una solució (no única) de d'una combinació convexa de dos punts de la frontera d'$\mathcal{R}$: r_a i r_b. Per conveniència agafem $\boldsymbol{r}_a = (1{,}0)$ (que es correspon amb el punt $\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{r}(x = 0)$), i el punt intersecció del cercle de radi 1 ($r_1^2 + r_2^2 = 1$) i la recta que passa per els punts $\boldsymbol{r}_a$ i $\boldsymbol{r}_0$: $r_1 + 3/2\,r_2 = 1$ (veure la figura 9.2 (a)). Operant s'obté $r_b = (-5/13{,}12/13)$. Substituint en l'equació $\boldsymbol{r}_0 = \alpha\,\boldsymbol{r}_a + (1-\alpha)\,\boldsymbol{r}_b$ s'obté $\alpha = 5/18$. $\boldsymbol{r}_b$ s'obté per $-5/13 = \cos(3x) \Rightarrow x = 1/3\arccos(-5/13) \approx 0'66$. D'on tenim que una estratègia òptima per el primer jugador és:

$$F(x) = 5/18\, I_0(x) + 13/18\, I_{0'66}(x)$$

Anàlogament, per el segon jugador agafem $\boldsymbol{s}_a = (1{,}0)$ (que es correspon amb el punt $\boldsymbol{s}_a = \boldsymbol{s}(y = 0)$), i el punt intersecció del cercle de radi 1 ($s_1^2 + s_2^2 = 1$) i la recta que passa per els punts $\boldsymbol{s}_a$ i $\boldsymbol{s}_0$: $s_1 + s_2 = 1$ (veure la figura 9.2 (b)). Operant s'obté $s_b = (0{,}1)$. Substituint en l'equació $\boldsymbol{s}_0 = \alpha\,\boldsymbol{s}_a + (1-\alpha)\,\boldsymbol{s}_b$ s'obté $\alpha = 2/3$. Clarament, $\boldsymbol{s}_b$ s'obté per $4y = \pi/2 \Rightarrow y = \pi/8 \approx 0'39$. D'on tenim que una estratègia òptima per el segon jugador és:

$$G(y) = 2/3\, I_0(y) + 1/3\, I_{0'39}(y) \qquad \blacksquare$$

Capítol 10
Jocs bipersonals de suma no zero

Ingredients:

- Conjunts d'estratègies pures $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ dels jugadors J_1 i J_2, respectivament:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= \{\alpha_1,\cdots\alpha_m\}\\ \mathcal{Y} &= \{\beta_1,\cdots\beta_n\}\end{aligned}$$

- Matrius $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ de pagament dels jugadors, de forma que (a_{ij},b_{ij}) és els pagaments (*payoffs*) dels jugadors quan trien (α_i,β_j). Per aquest motiu també es diuen jocs bimatricials. Les dues matrius solen representar-se en una sola:

$$\begin{bmatrix} (a_{11},b_{11}) & (a_{12},b_{12}) & \cdots & (a_{1n},b_{1n})\\ (a_{21},b_{21}) & (a_{22},b_{22}) & \cdots & (a_{2n},b_{2n})\\ \cdots & & & \\ (a_{m1},b_{m1}) & (a_{m2},b_{m2}) & \cdots & (a_{mn},b_{mn})\end{bmatrix}$$

- Extensió mixta del joc: els jugadors poden triar les estratègies pures amb probabilitats $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}^* \times \mathcal{Y}^*$, $\mathcal{X}^* = \Delta_m$, $\mathcal{Y}^* = \Delta_n$, on $\Delta_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^i \mid \boldsymbol{x} \geq 0 \wedge \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{e} = 1\}$, amb pagaments (M_1,M_2):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= (x_1,\cdots x_m)\\ \boldsymbol{y} &= (y_1,\cdots y_m)\\ M_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\, a_{ij}\, y_j = \boldsymbol{x}\,A\,\boldsymbol{y}\\ M_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\, b_{ij}\, y_j = \boldsymbol{x}\,B\,\boldsymbol{y}\end{aligned}$$